

CAPITOLO 5

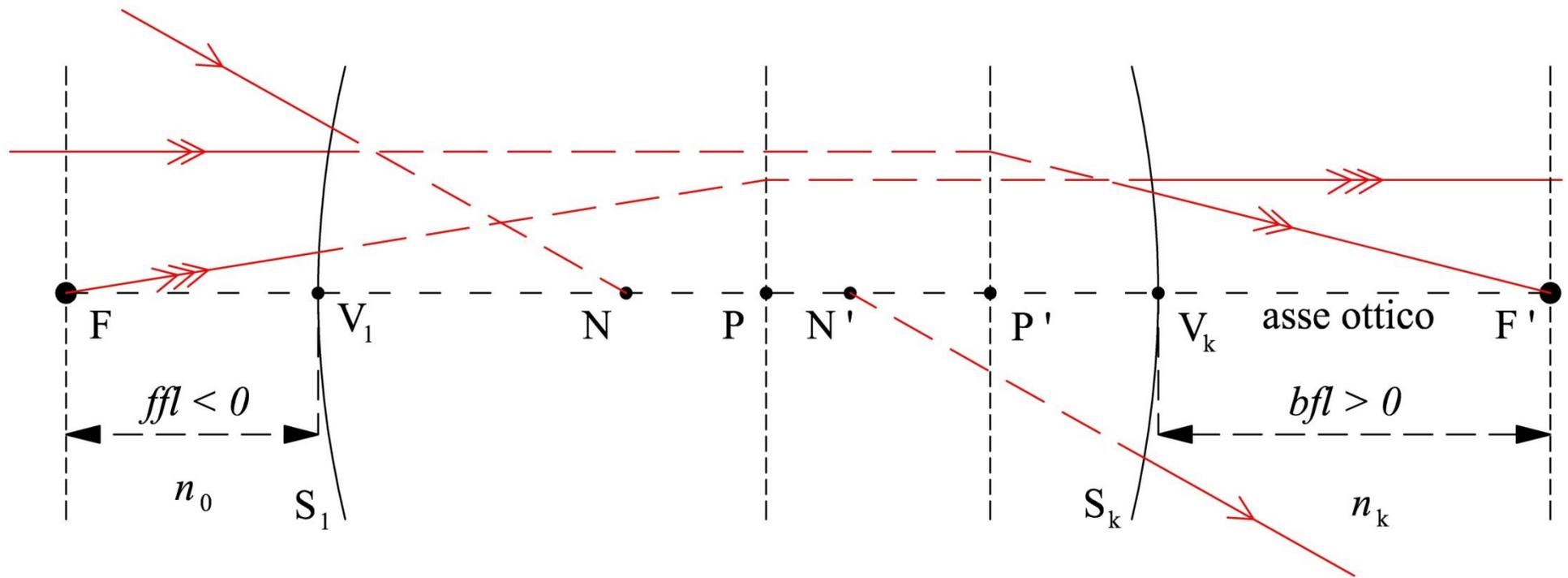
LE CARATTERISTICHE PARASSIALI DI ALCUNI SEMPLICI SISTEMI OTTICI CENTRATI

Lo scopo di questo capitolo è quello di mostrare come sia possibile determinare, nel caso di semplici sistemi ottici centrati, la posizione dei sei punti cardinali: **i due punti focali, i due punti principali ed i due punti nodali.**

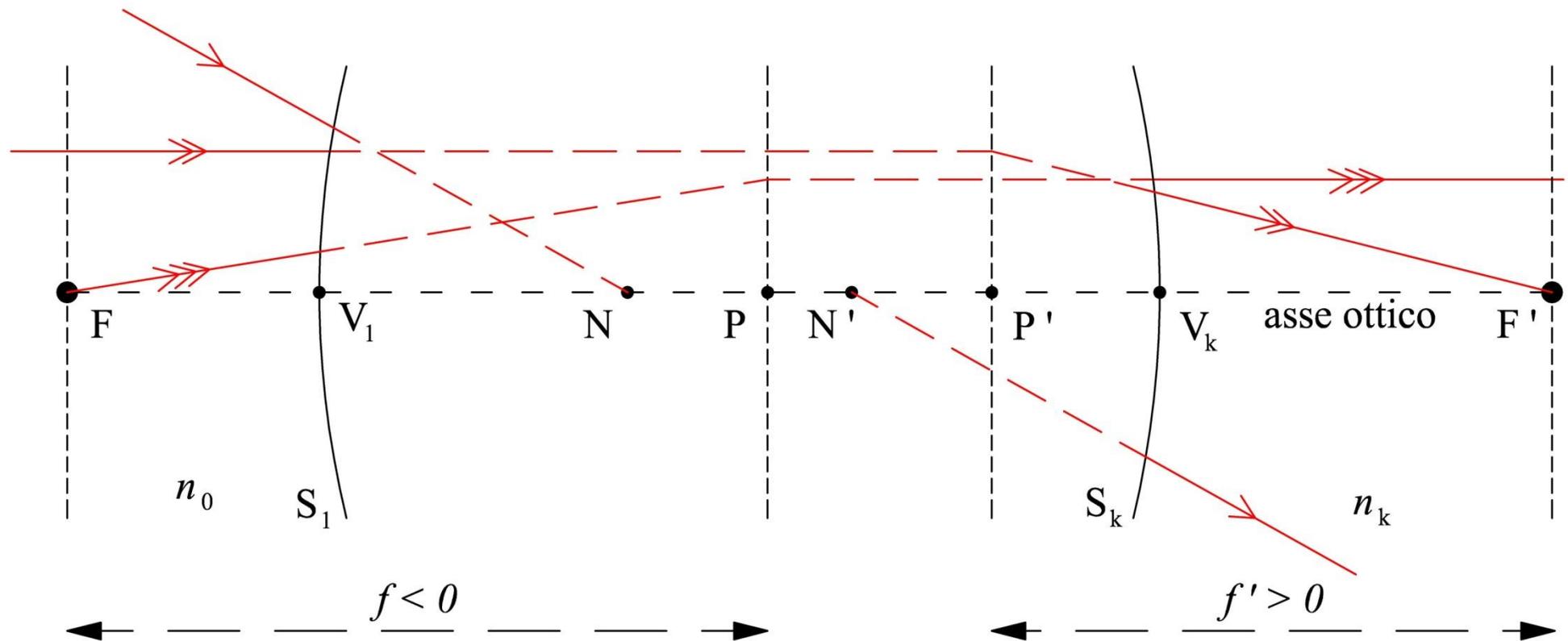
La conoscenza della posizione di questi sei punti rispetto alle superfici del sistema ottico è molto importante per la determinazione delle proprietà di *imaging* di quest'ultimo.

In particolare, abbiamo visto nel precedente capitolo come **la legge di coniugazione** permette di determinare il piano immagine coniugato di un generico piano oggetto e come **l'equazione dell'ingrandimento** permette di calcolare l'ingrandimento associato ad un generica coppia di piani coniugati.

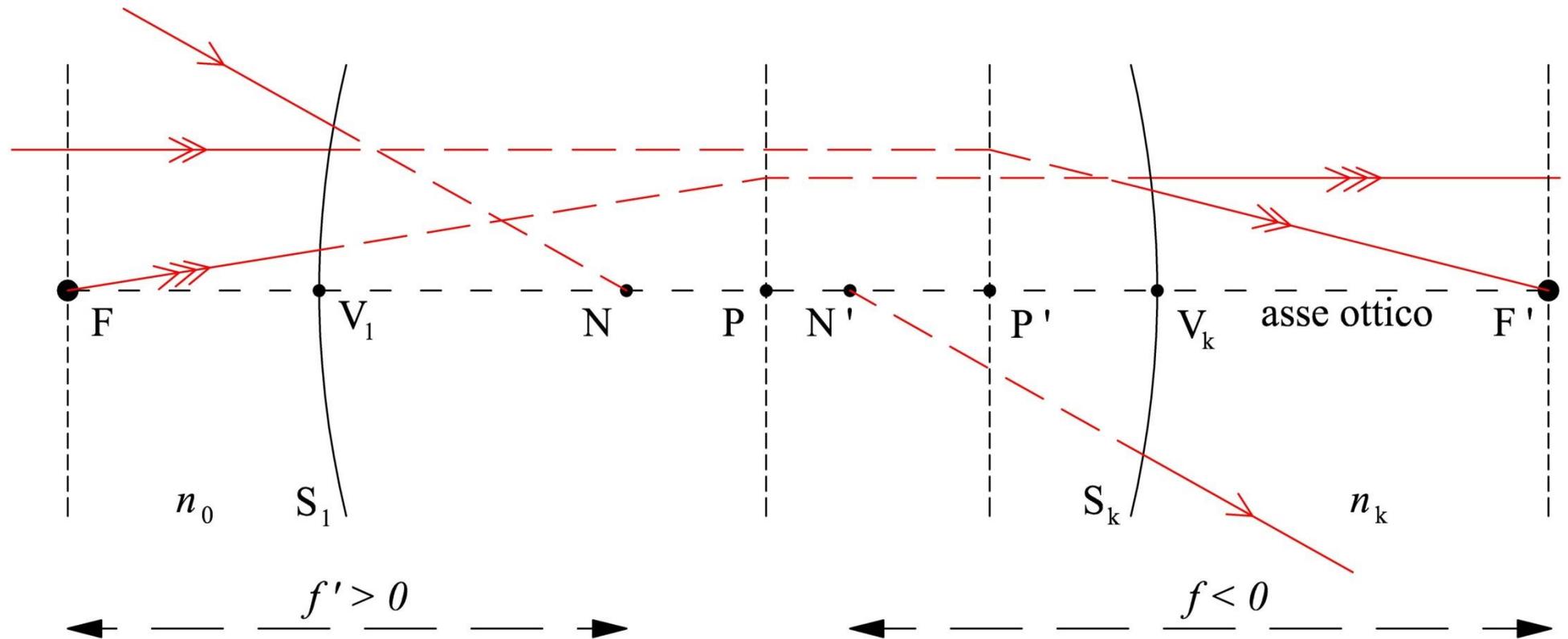
La determinazione della posizione del **primo (secondo) punto focale** rispetto alla prima (ultima) superficie del sistema ottico centrato avviene tramite la determinazione della lunghezza focale anteriore (posteriore).



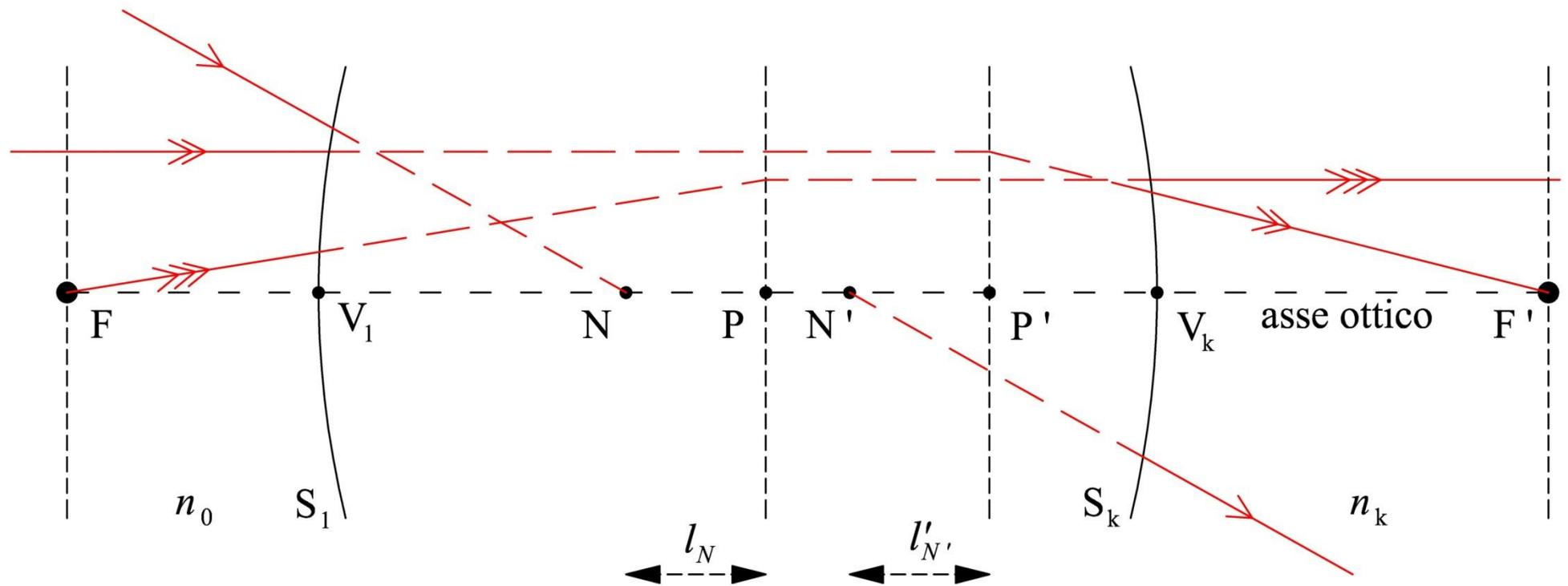
La determinazione della posizione del **primo (secondo) punto principale** avviene tramite la conoscenza della posizione del primo (secondo) punto focale e dalla determinazione della lunghezza focale effettiva anteriore (posteriore).



La determinazione della posizione del **primo (secondo) punto nodale** avviene tramite la conoscenza della posizione del primo (secondo) punto focale e dalla conoscenza della lunghezza focale effettiva posteriore (anteriore),



oppure dalla conoscenza della posizione del primo (secondo) punto principale e dalla determinazione di $l_N = l'_{N'} = \left(1 - \frac{n_0}{n_k}\right) f'$



In questo modo, il problema della determinazione della posizione dei sei punti cardinali è stato ricondotto alla determinazione delle quattro lunghezze focali: bfl , ffl , f' ed f .

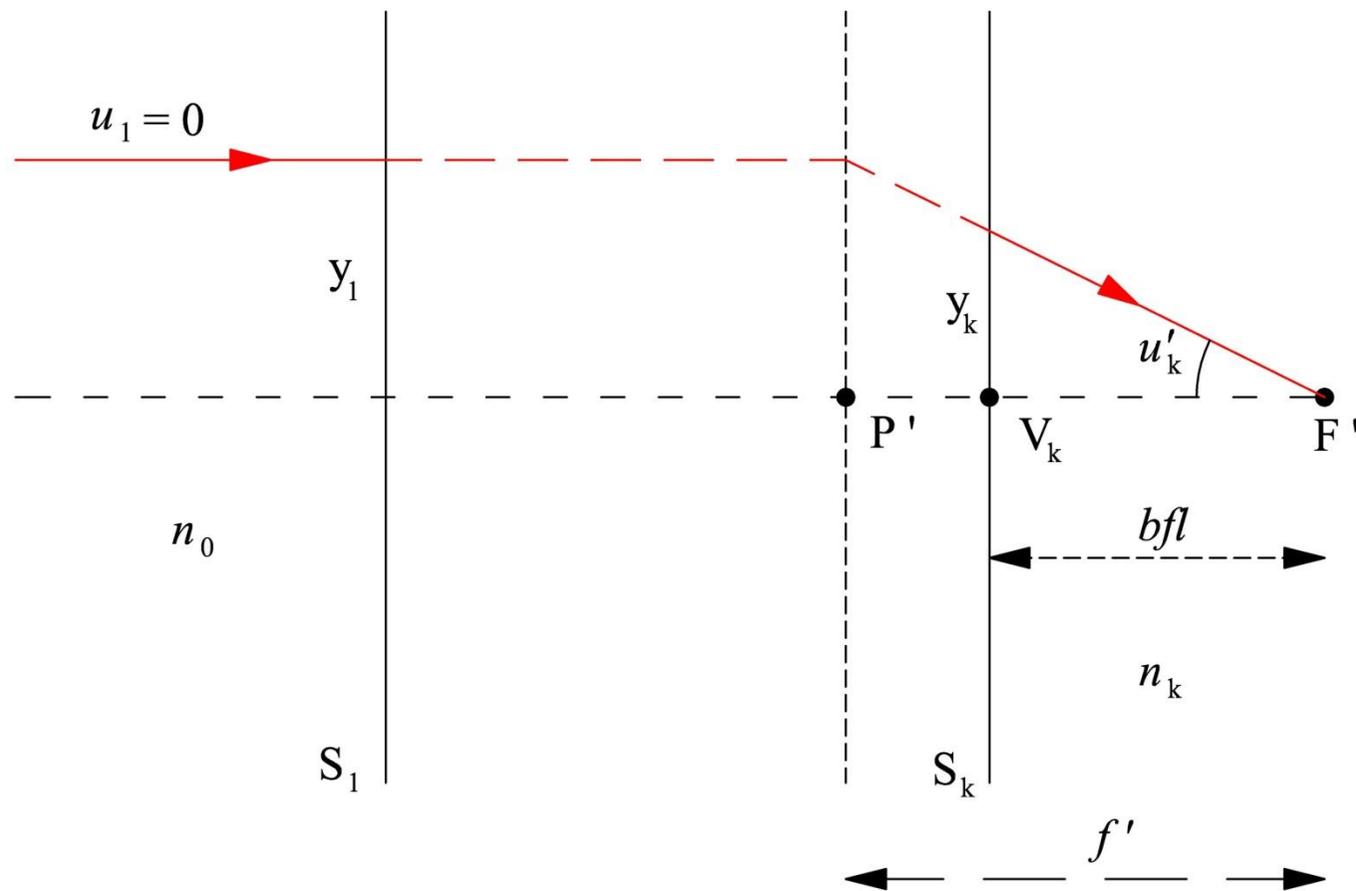
Il calcolo di quest'ultime avviene mediante il tracciamento di un raggio meridiano parassiale parallelo all'asse ottico attraverso tutto il sistema ottico centrato.

Supponiamo allora di aver tracciato, mediante le formule per il tracciamento di un raggio meridiano parassiale, lungo tutto il sistema ottico centrato il raggio che sulla prima superficie S_1 è individuato dalle variabili $u_1 = 0$ e da un generico valore di y_1 . Siano y_k e u'_k le variabili che competono a questo raggio sull'ultima superficie S_k .

Dalla seguente figura è facile ricavare che:

$$bfl = -\frac{y_k}{u'_k}$$

$$f' = -\frac{y_1}{u'_k}$$



Utilizzando la relazione che lega le due lunghezze focali effettive inoltre si ottiene:

$$f = - \frac{n_0}{n_k} f' = \frac{n_0}{n_k} \frac{y_1}{u'_k}$$

Basandosi sul principio di reversibilità della luce il calcolo della lunghezza focale anteriore ffl si effettua tracciando un raggio meridiano parassiale parallelo all'asse attraverso il sistema ottico centrato **invertito**.

L'indice di rifrazione dove è immerso il piano oggetto del sistema ottico centrato invertito è adesso n_k , e la sua prima superficie è S_k . S_1 è la sua ultima superficie ed n_0 è l'indice di rifrazione del mezzo contenente il

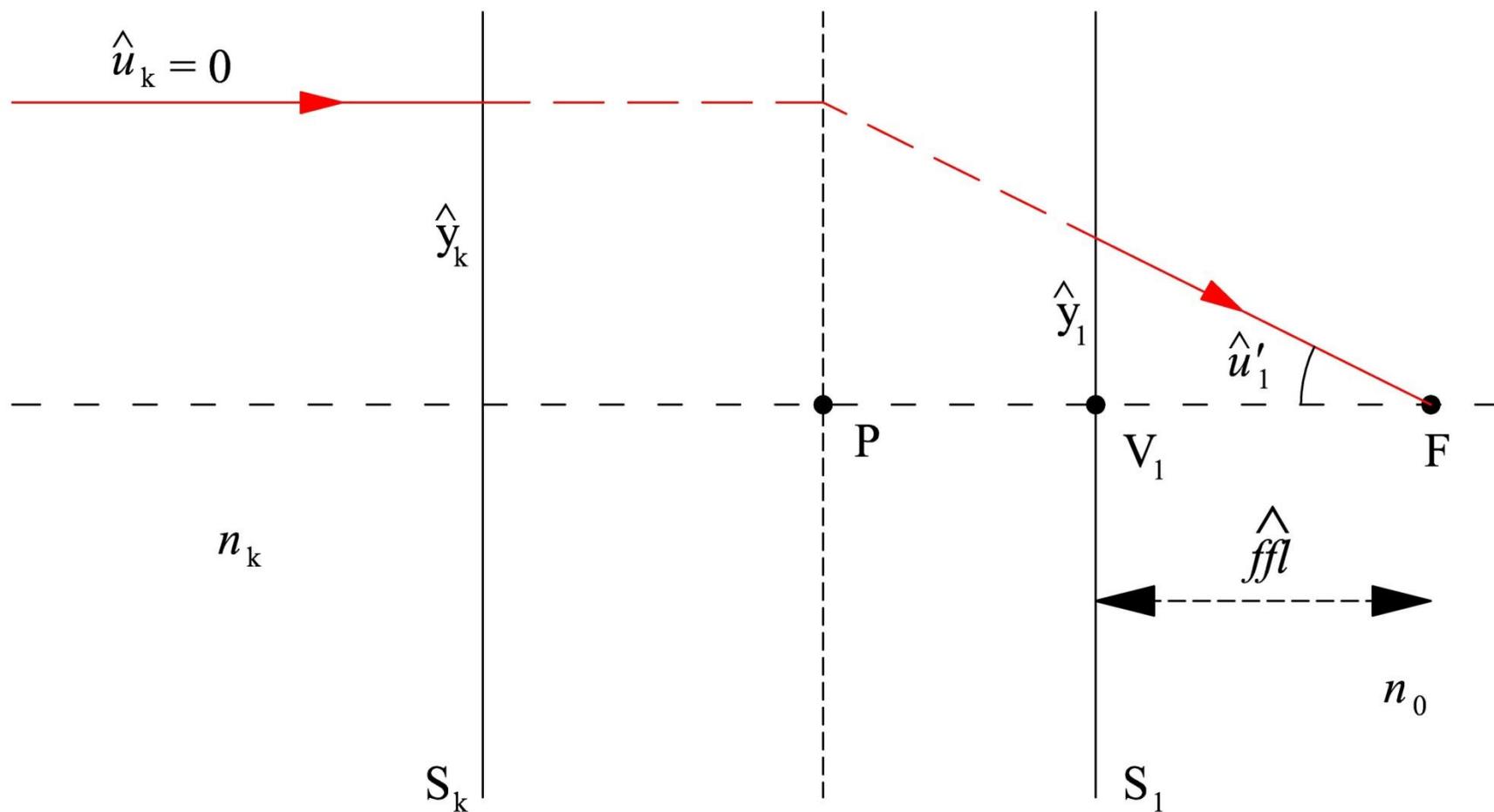
piano immagine. Particolare attenzione deve essere rivolta al segno delle curvature delle superfici del sistema ottico centrato invertito, in quanto l'inversione produce **un cambiamento di segno delle curvature** di tutte le superfici.

Supponiamo allora di aver tracciato, mediante le formule per il tracciamento di un raggio meridiano parassiale, lungo tutto il sistema ottico centrato invertito il raggio che sulla prima superficie S_k è individuato dalle variabili $\hat{u}_k = 0$ e da un generico valore di \hat{y}_k . Siano \hat{y}_1 e \hat{u}'_1 le variabili che competono al raggio sull'ultima superficie S_1 .

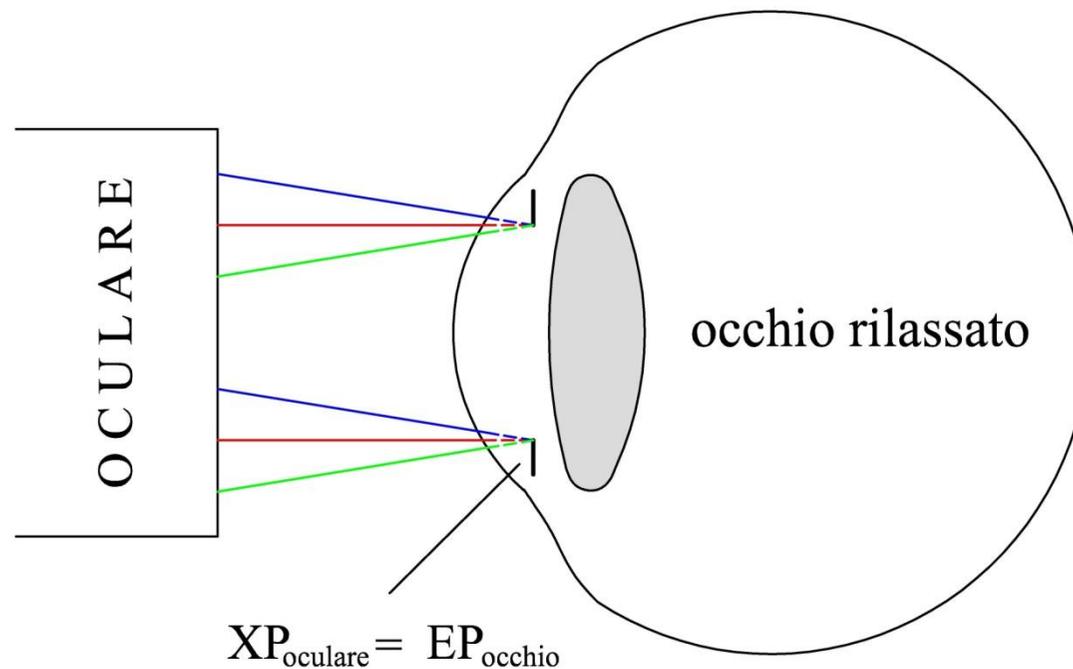
Facendo riferimento alla seguente figura e ragionando in maniera analoga al calcolo della *bfl* si ottiene:

$$\widehat{ffl} = -\frac{\widehat{y}_1}{\widehat{u}'_1}$$

$$ffl = -\widehat{ffl}$$



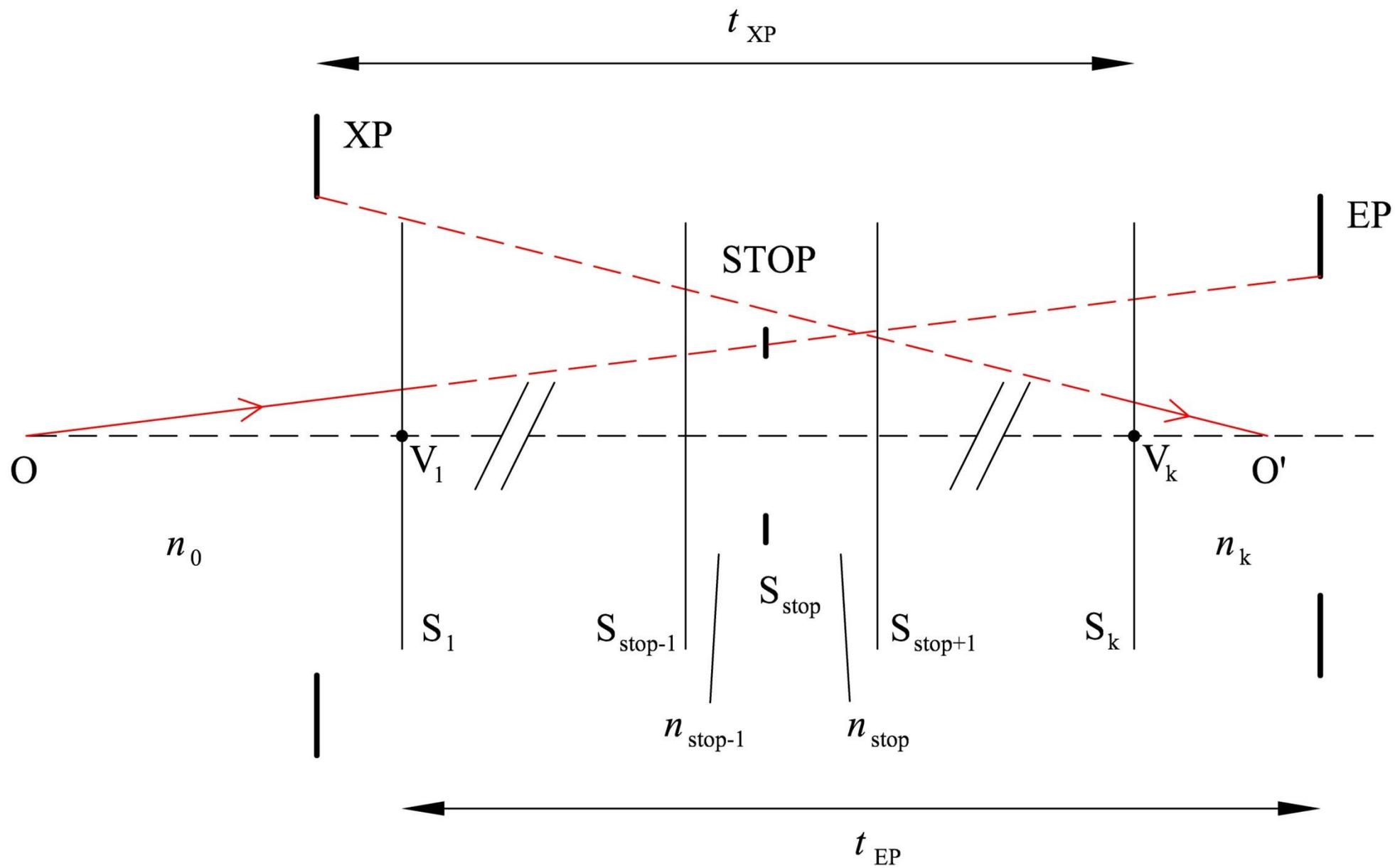
Quando si interfacciano due diversi sistemi ottici, la conoscenza della posizione e dimensione delle rispettive pupille è importante per un interfacciamento ottimale. Ad esempio, quando avviciniamo l'occhio all'oculare di un frontifocometro, l'interfacciamento di questi due sistemi ottici è ottimale se la pupilla di uscita dell'oculare coincide in posizione e dimensione con la pupilla d'ingresso dell'occhio.



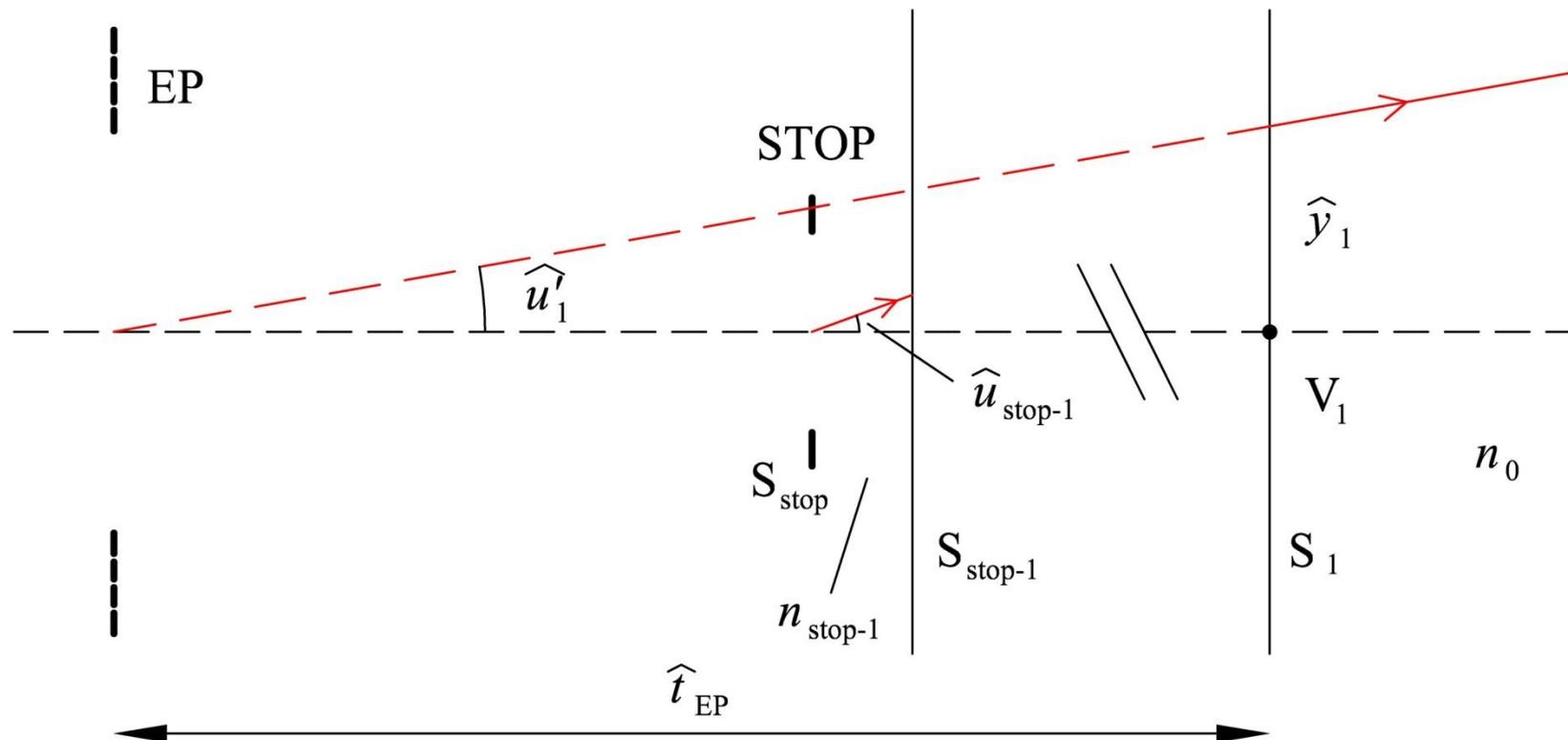
La determinazione della posizione delle pupille di un sistema ottico centrato avviene tramite il calcolo della distanza t_{EP} a cui si trova la pupilla d'ingresso rispetto a S_1 , e della distanza t_{XP} a cui si trova la pupilla d'uscita rispetto a S_k .

La distanza t_{EP} è positiva (negativa) se la EP si trova a destra (sinistra) di S_1 e analogamente la distanza t_{XP} è positiva (negativa) se la XP si trova a destra (sinistra) di S_k .

La dimensione della pupilla d'ingresso (uscita) si calcola determinando l'ingrandimento $m_{\text{stop-EP}}$ ($m_{\text{stop-XP}}$) che compete alla coppia di piani coniugati contenenti rispettivamente lo stop e la EP (XP).



Consideriamo la porzione del sistema ottico centrato invertito, costituita dalle superfici $S_{(\text{stop}-1)} \dots S_1$. Dalla sua stessa definizione discende che la EP coincide con l'immagine dello stop fatta da quest'ultima porzione di sistema ottico.



Supponiamo poi di aver tracciato un generico raggio proveniente dal punto assiale dello stop. Dalla precedente figura è facile allora ricavare che:

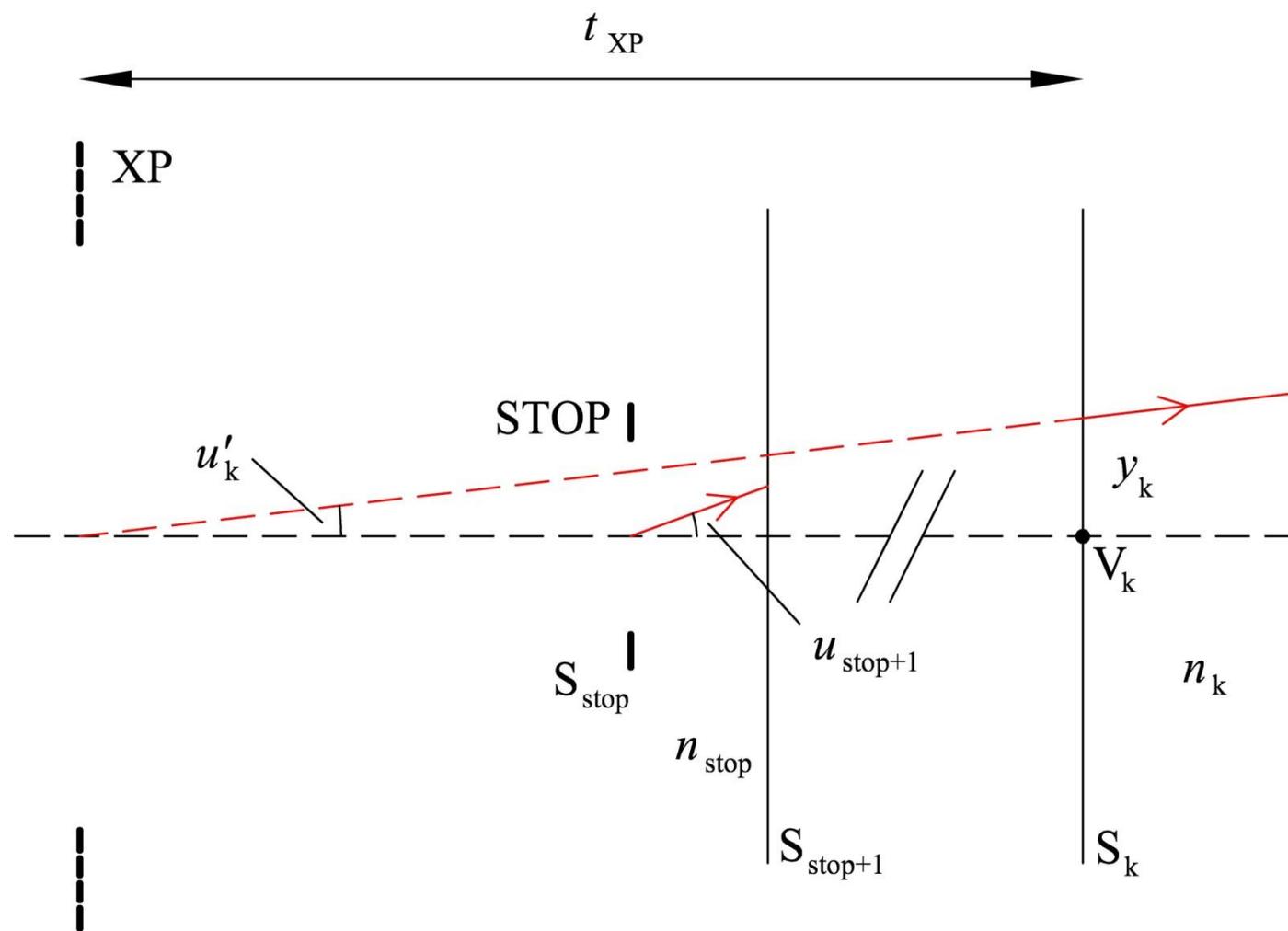
$$t_{EP} = - \hat{t}_{EP} = \frac{\hat{y}_1}{\hat{u}'_1}$$

Inoltre è possibile dimostrare che:

$$|m_{\text{stop-EP}}| = \frac{\phi_{EP}}{\phi_{\text{stop}}} = \left| \frac{n_{\text{stop-1}} \hat{u}_{\text{stop-1}}}{n_0 \hat{u}'_1} \right|$$

dove abbiamo indicato con ϕ_{stop} e ϕ_{EP} rispettivamente il diametro dello stop e della pupilla d'ingresso.

Consideriamo la porzione del sistema ottico centrato, costituita dalle superfici $S_{(\text{stop}+1)} \dots S_k$. Dalla sua stessa definizione discende che la XP coincide con l'immagine dello stop fatta da quest'ultima porzione di sistema ottico.



Supponiamo poi di aver tracciato un generico raggio proveniente dal punto assiale dello stop. Dalla precedente figura è facile allora ricavare che:

$$t_{XP} = - \frac{y_k}{u'_k}$$

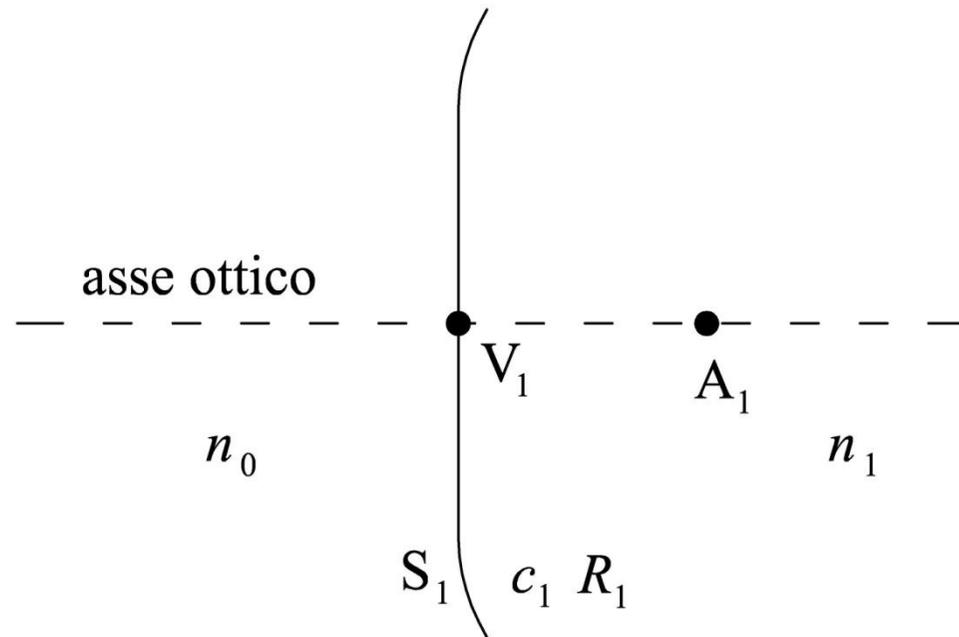
Inoltre è possibile dimostrare che:

$$|m_{\text{stop-XP}}| = \frac{\phi_{XP}}{\phi_{\text{stop}}} = \left| \frac{n_{\text{stop}} u_{\text{stop}+1}}{n_k u'_k} \right|$$

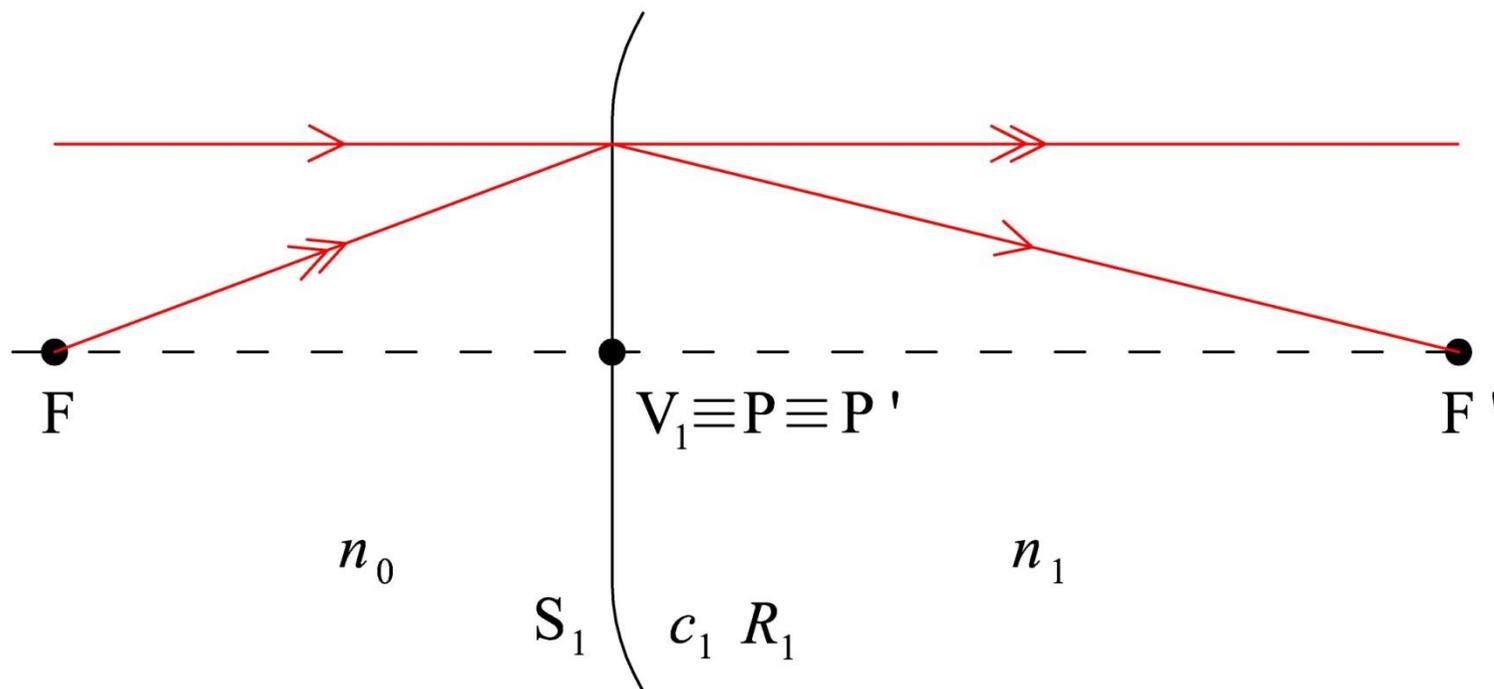
dove abbiamo indicato con ϕ_{XP} il diametro della pupilla di uscita.

Il diottro sferico in rifrazione

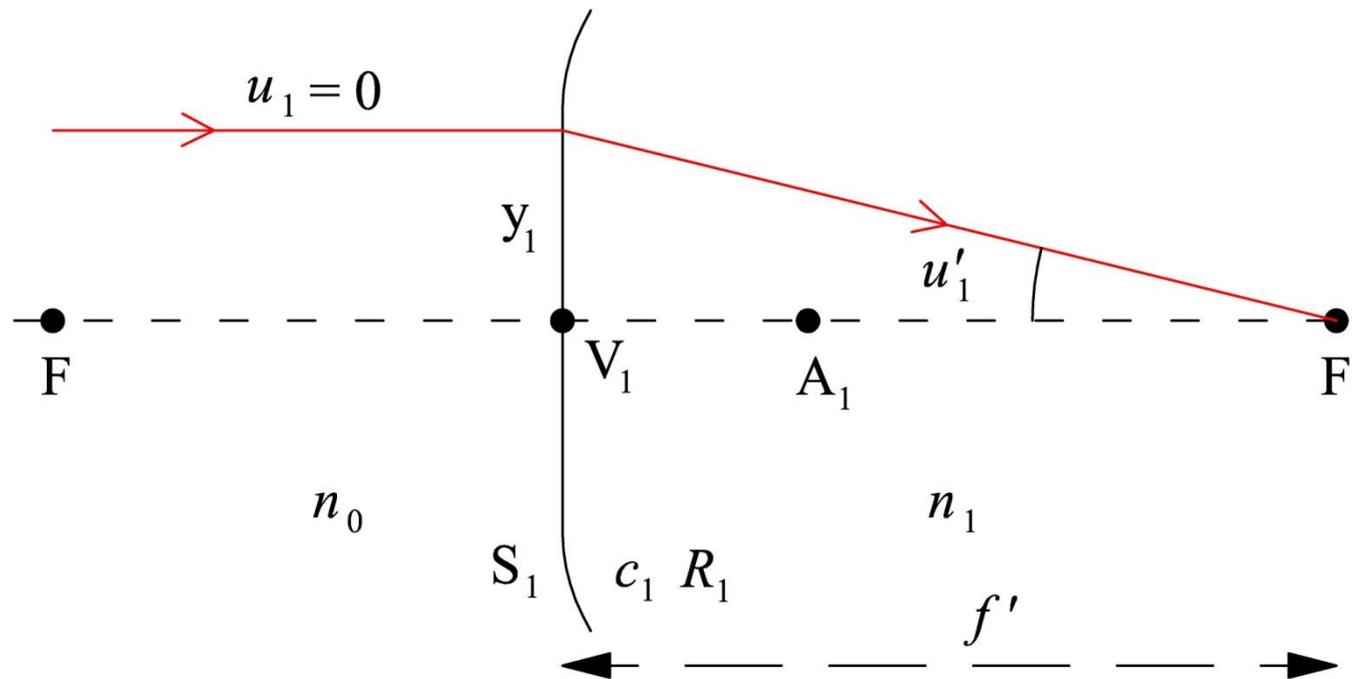
Consideriamo un diottro sferico in rifrazione S_1 che separa due mezzi i cui indici di rifrazione, alla lunghezza d'onda di interesse, sono rispettivamente n_0 ed n_1 . Indichiamo con c_1 , R_1 , A_1 ed V_1 rispettivamente la curvatura, il raggio di curvatura, il centro ed il vertice del diottro considerato.



Dalla figura è facile concludere che i piani principali di un singolo diottro non possono altro che coincidere entrambi con il diottro stesso. Di conseguenza i due punti principali coincidono tra di loro e coincidono con il vertice del diottro.



Da quest'ultima osservazione discende che $ffl = f$ e $bfl = f'$. Per il calcolo delle due lunghezze focali effettive tracciamo un raggio meridiano parassiale parallelo all'asse ottico.



$$n_1 u'_1 = n_0 u_1 - (n_1 - n_0) c_1 y_1 \quad \Rightarrow \quad u'_1 = - \frac{(n_1 - n_0)}{n_1} c_1 y_1$$

Allora abbiamo che:

$$f' = \frac{n_1}{(n_1 - n_0) c_1}$$

$$\Phi = (n_1 - n_0) c_1$$

$$f = - \frac{n_0}{(n_1 - n_0) c_1}$$

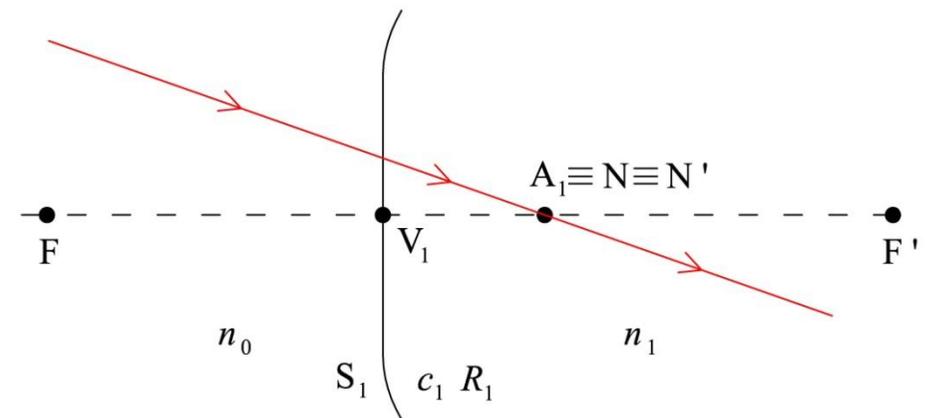
Dato che i due punti principali del diottro coincidono tra di loro anche i punti nodali coincideranno tra di loro e la loro distanza dai punti principali è data da:

$$l_N = l'_{N'} = \left(1 - \frac{n_0}{n_1}\right) f' = \frac{n_1 - n_0}{n_1} \frac{n_1}{(n_1 - n_0) c_1}$$

Allora:

$$l_N = l'_{N'} = R_1$$

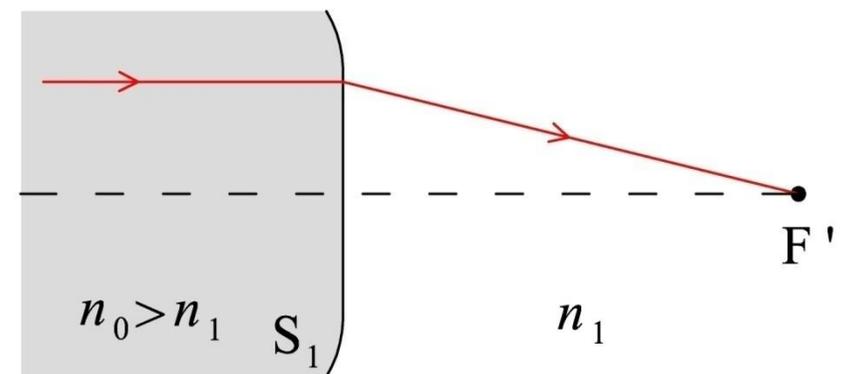
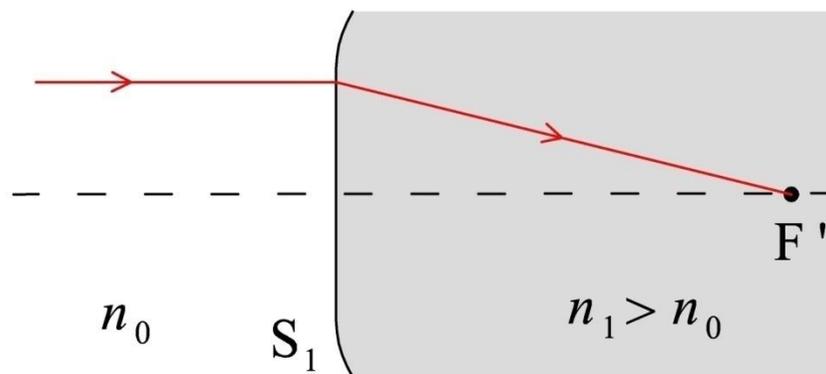
ovvero i punti nodali di un diottro sferico coincidono tra di loro e coincidono con il centro dello stesso diottro.



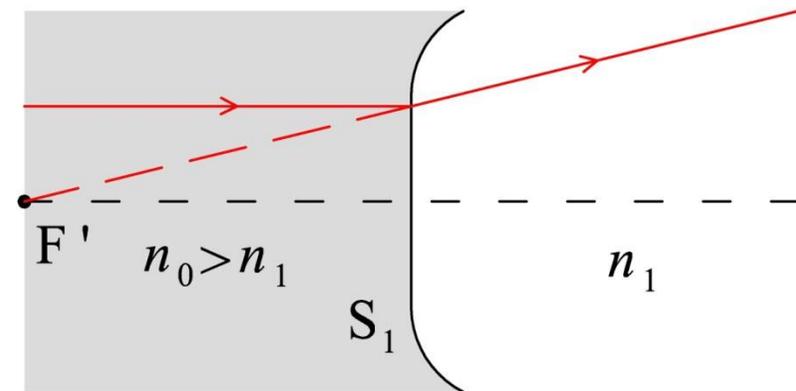
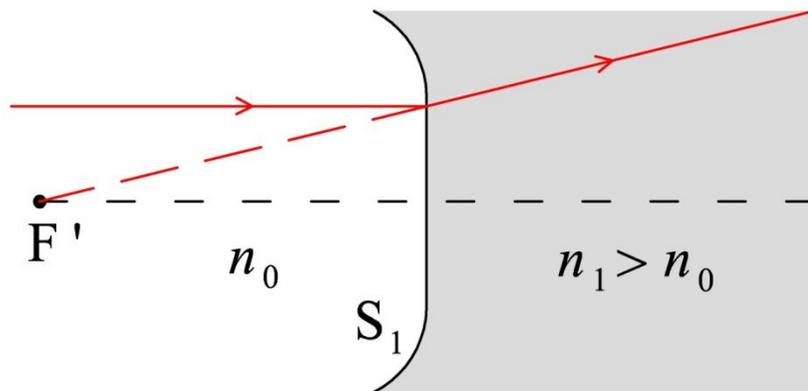
$$f' = \frac{n_1}{(n_1 - n_0) c_1}$$

$$\Phi = (n_1 - n_0) c_1$$

Dalle precedenti formule è facile ricavare che se, $(n_1 - n_0) > 0$ e $c_1 > 0$ oppure se $(n_1 - n_0) < 0$ e $c_1 < 0$, f' e Φ sono **positivi** ed il diottro sferico è **convergente** in quanto il suo secondo punto focale è **reale**.



Analogamente è facile ricavare che se, $(n_1 - n_0) > 0$ e $c_1 < 0$ oppure se $(n_1 - n_0) < 0$ e $c_1 > 0$, f' e Φ sono **negativi** ed il diottro sferico è **divergente** in quanto il suo secondo punto focale è **virtuale**.



Per studiare le proprietà di *imaging* di un diottro sferico in rifrazione, consideriamo a titolo di esempio un diottro aria-vetro e supponiamo che alla lunghezza d'onda di interesse l'indice di rifrazione del vetro considerato sia 1.5. Consideriamo poi un oggetto di dimensione finita e determiniamo la posizione e la dimensione della sua immagine quando l'oggetto si sposta lungo l'asse ottico.

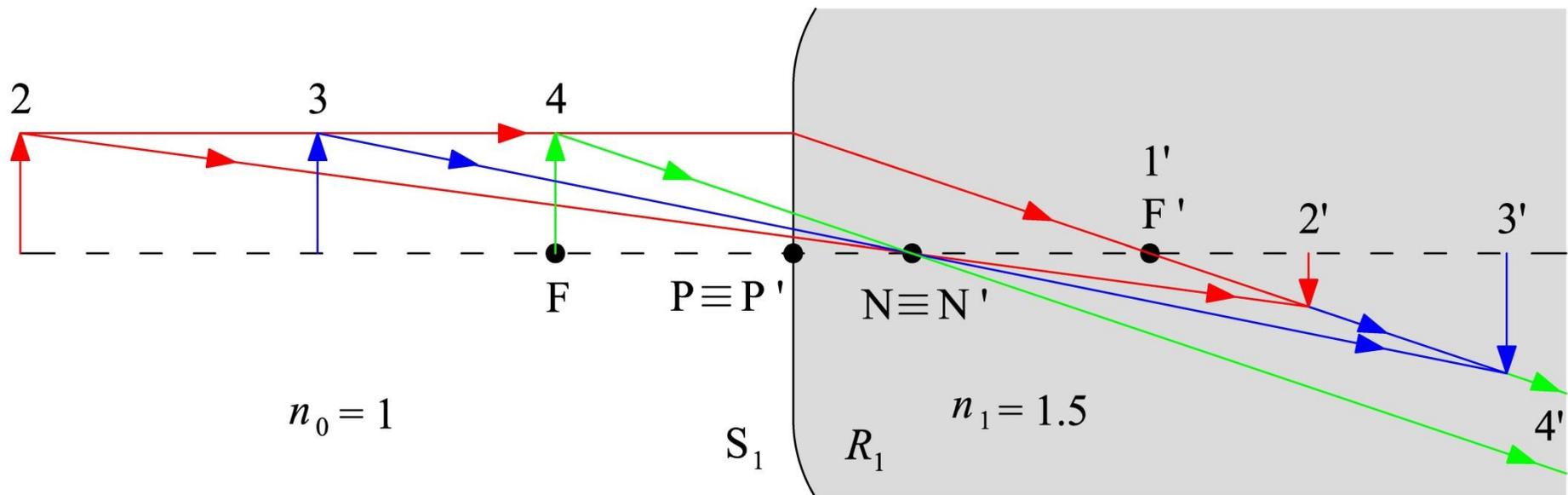
Essendo in questo caso $n_0 = 1$ ed $n_1 = 1.5$ dalle precedenti formule otteniamo:

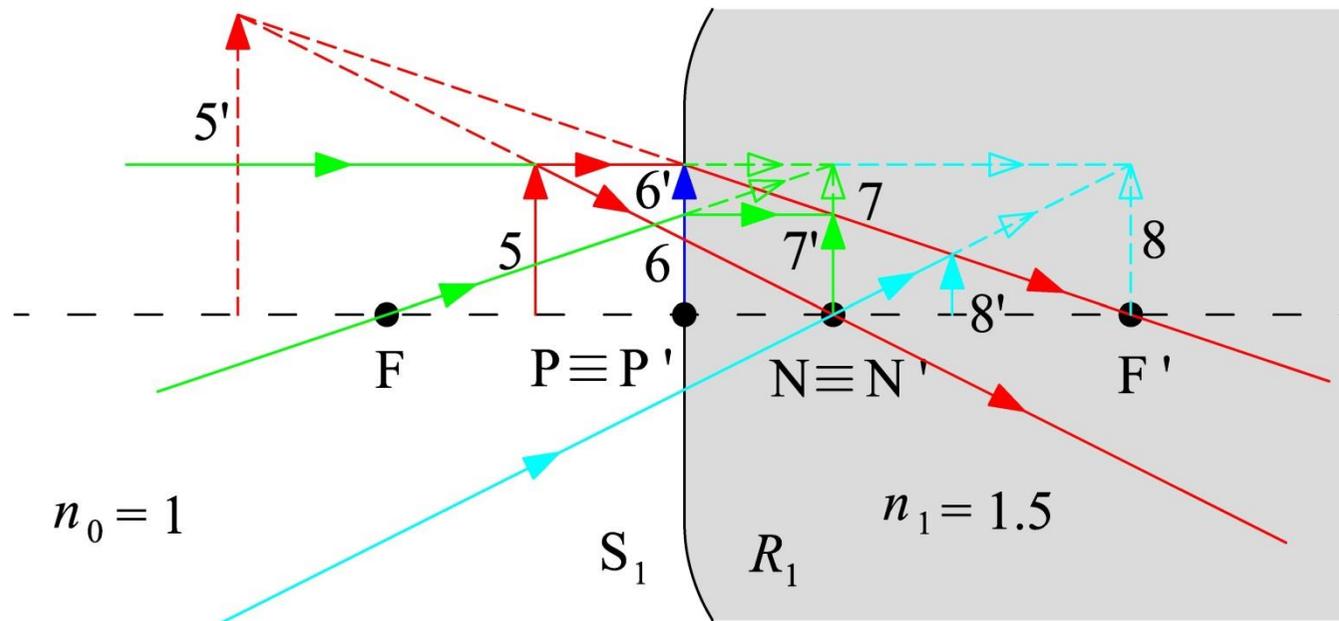
$$f = -2 R_1$$

$$f' = 3 R_1$$

dove R_1 è il raggio di curvatura del diottro che inizialmente supponiamo convergente ($R_1 > 0$).

Con riferimento alla figura supponiamo che inizialmente l'oggetto sia all'infinito (1). Per quanto detto precedentemente la sua immagine (1') è reale e coincide con il secondo punto focale. Mano a mano che l'oggetto si avvicina al primo punto focale, (2) e (3), la rispettiva immagine (2') e (3') si allontana dal secondo punto focale allontanandosi dal diottro, è reale, rovesciata e aumenta di dimensioni, fino a diventare infinita quando l'oggetto è sul primo piano focale.

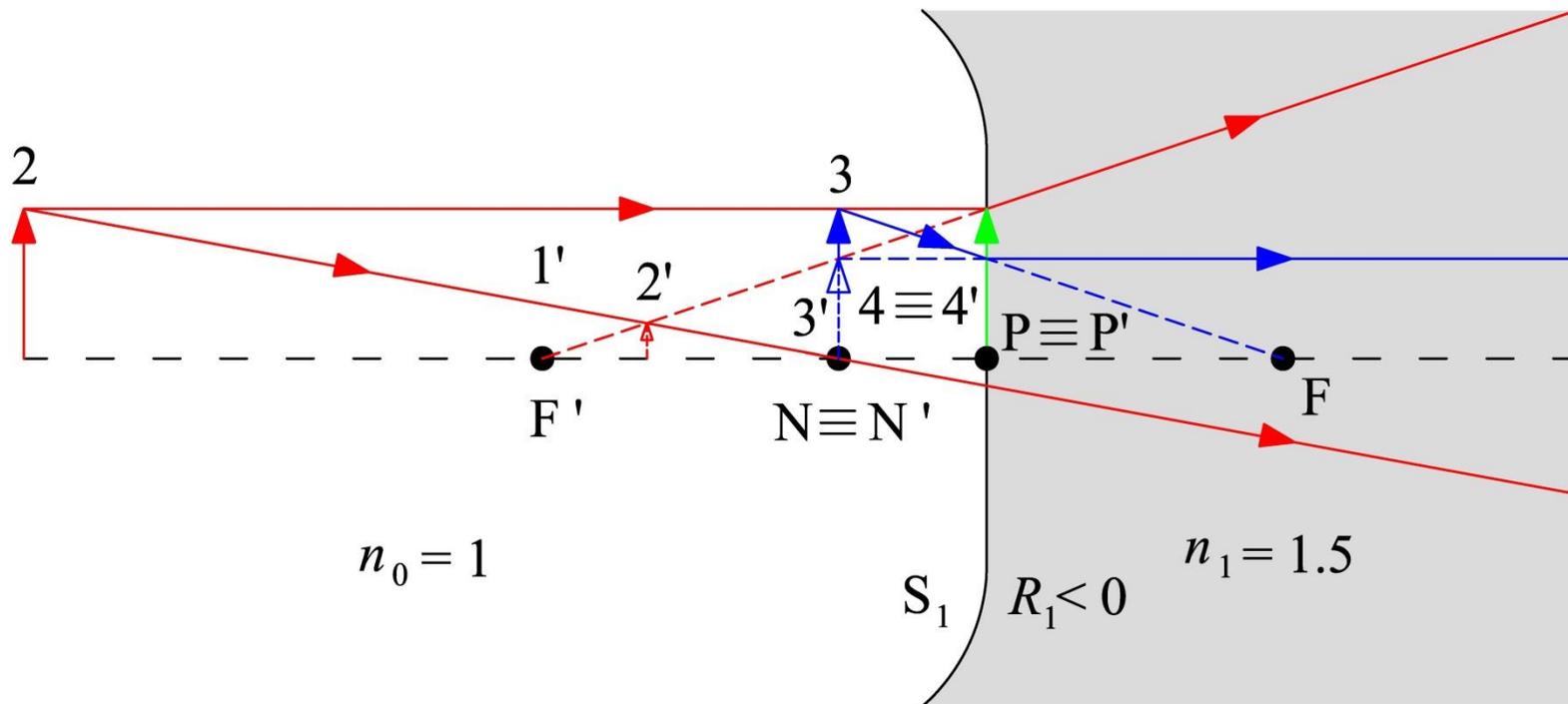




Proseguendo oltre il primo punto focale, posizione (5), l'immagine diventa virtuale, eretta e diminuisce di dimensioni fino a diventare uguale all'oggetto nella posizione (6) quando quest'ultimo è sul diottro stesso che, come abbiamo detto, coincide con i piani principali. Oltre il diottro, posizioni (7) e (8), l'oggetto diventa virtuale e la corrispondente immagine è reale, eretta e continua a diminuire di dimensioni fino a coincidere con il secondo punto focale quando l'oggetto è a distanza infinita dal diottro.

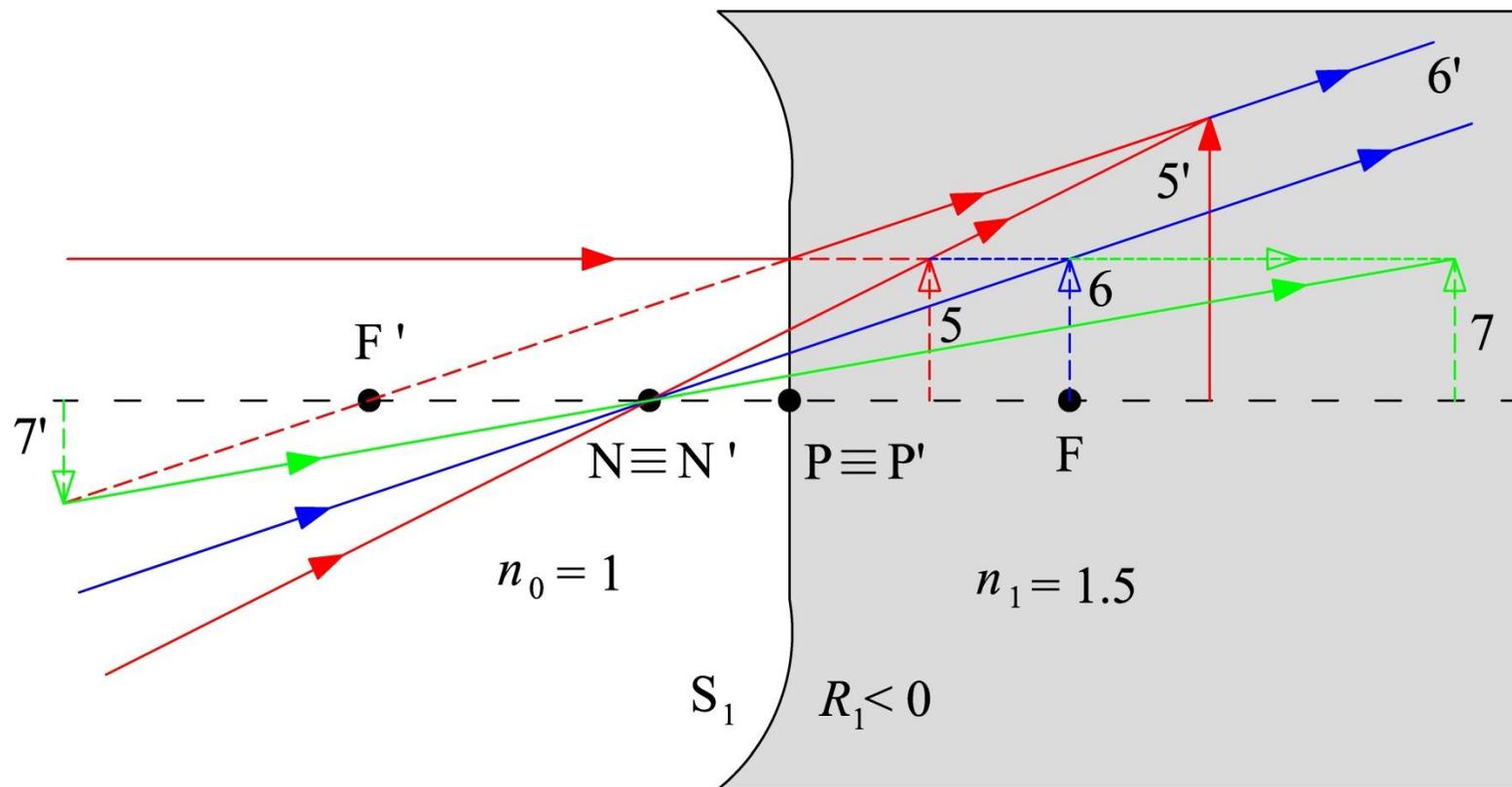
Inoltre quando l'oggetto virtuale si trova nella posizione (7) la sua immagine reale (7') giace sullo stesso piano e ciò è dovuto alla coincidenza dei piani nodali.

Confrontando le due ultime figure sembrerebbe che al passaggio dell'oggetto attraverso il primo piano focale l'immagine subisca una forte discontinuità: da reale ed invertita a virtuale ed eretta. In realtà tale discontinuità svanisce se pensiamo che quando l'oggetto è sul primo piano focale i raggi emergono dal diotro paralleli, ed è ugualmente lecito pensare sia che i raggi si intersechino all'infinito nel NBK7 formando una immagine di dimensione infinita, reale e invertita, sia che siano i prolungamenti all'indietro dei raggi emergenti che si intersechino all'infinito nell'aria formando una immagine di dimensione infinita, virtuale ed eretta.



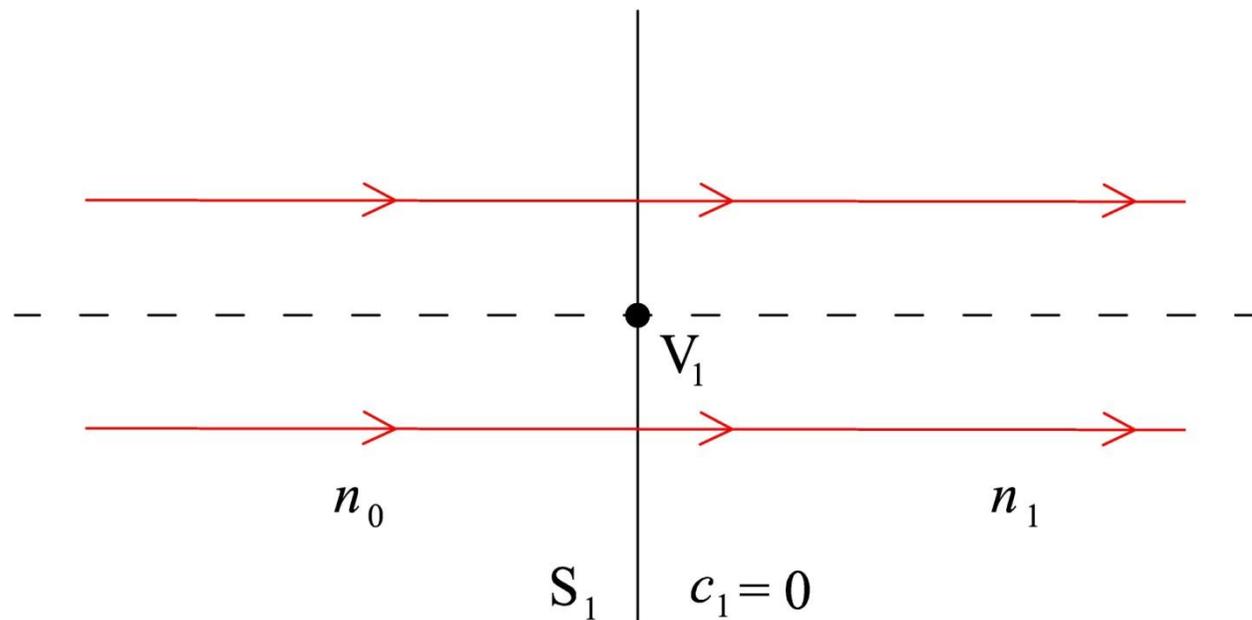
Supponiamo adesso che il diottro sia divergente ($R_1 < 0$). Quando l'oggetto è all'infinito, l'immagine (1') fatta dal diottro è virtuale e coincide con il secondo punto focale. Mano a mano che l'oggetto si avvicina al diottro, (2) e (3), la rispettiva immagine (2') e (3') si allontana dal secondo punto focale avvicinandosi al diottro, è virtuale, eretta e aumenta di dimensioni, fino a diventare uguale all'oggetto nella posizione (4) quando

quest'ultimo è sul diottro stesso. Quando l'oggetto reale si trova nella posizione (3) la sua immagine virtuale (3') giace sullo stesso piano

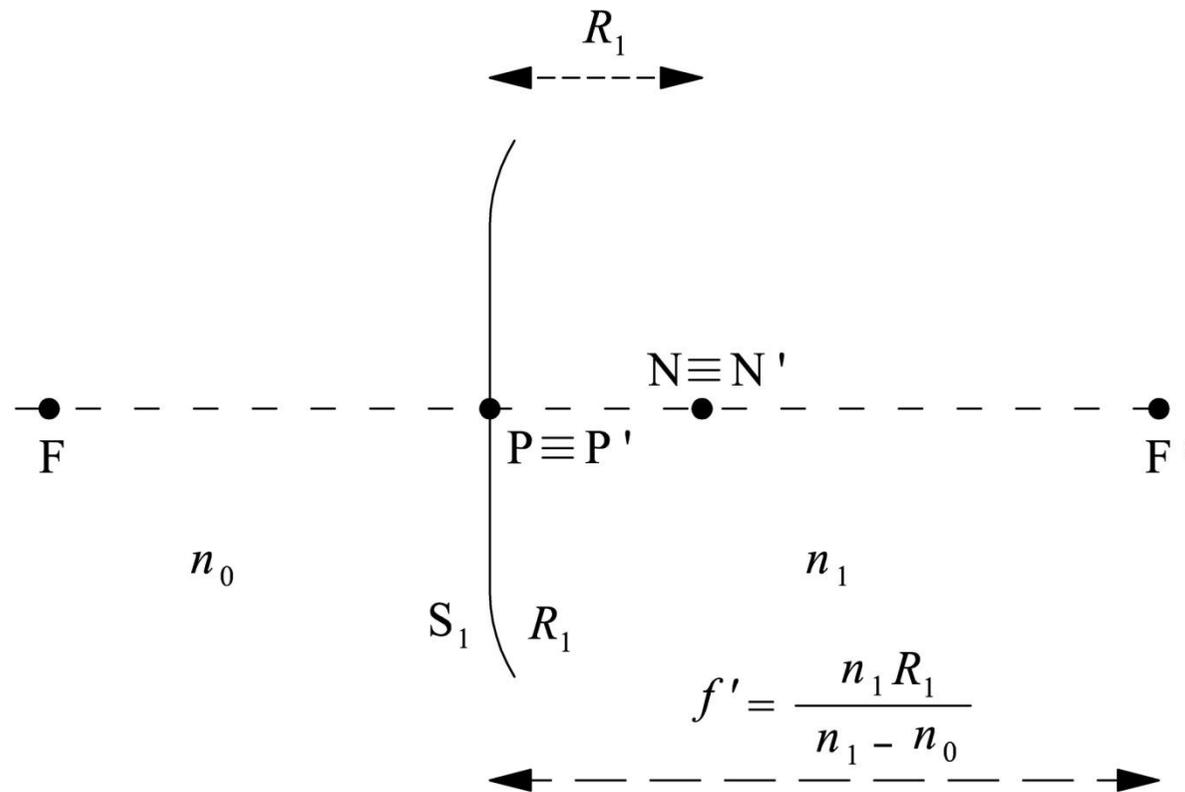


Proseguendo oltre il diottro, posizione (5), l'oggetto diventa virtuale e la corrispondente immagine diventa reale, eretta ed aumenta di dimensioni fino a diventare infinita quando l'oggetto è sul primo piano focale (posizione (6)). Oltre il primo piano focale (posizione (7)), l'immagine diventa virtuale e rovesciata e la sua dimensione diminuisce fino a coincidere con il secondo punto focale quando l'oggetto è a distanza infinita dal diottro.

Consideriamo adesso il caso particolare del **diottro piano in rifrazione**. Come è mostrato in figura questo sistema ottico è **afocale**. Infatti tutti i raggi provenienti dalla sorgente puntiforme posta sull'asse all'infinito si trovano in condizioni di incidenza normale e quindi non vengono deviati dal diottro.



Guardando il diottro piano come un diottro sferico il cui raggio $R_1 \Rightarrow \infty$ è facile concludere che **anche per il diottro piano in rifrazione i piani principali coincidono con il diottro stesso. Inoltre oltre i piani focali anche i piani nodali sono a distanza infinita dal diottro.**



La legge di coniugazione e l'equazione dell'ingrandimento:

$$\frac{n_1}{l'} = \frac{n_0}{l} + \frac{n_1}{f'}$$

$$m = \frac{\eta'}{\eta} = \frac{n_0 l'}{n_1 l}$$

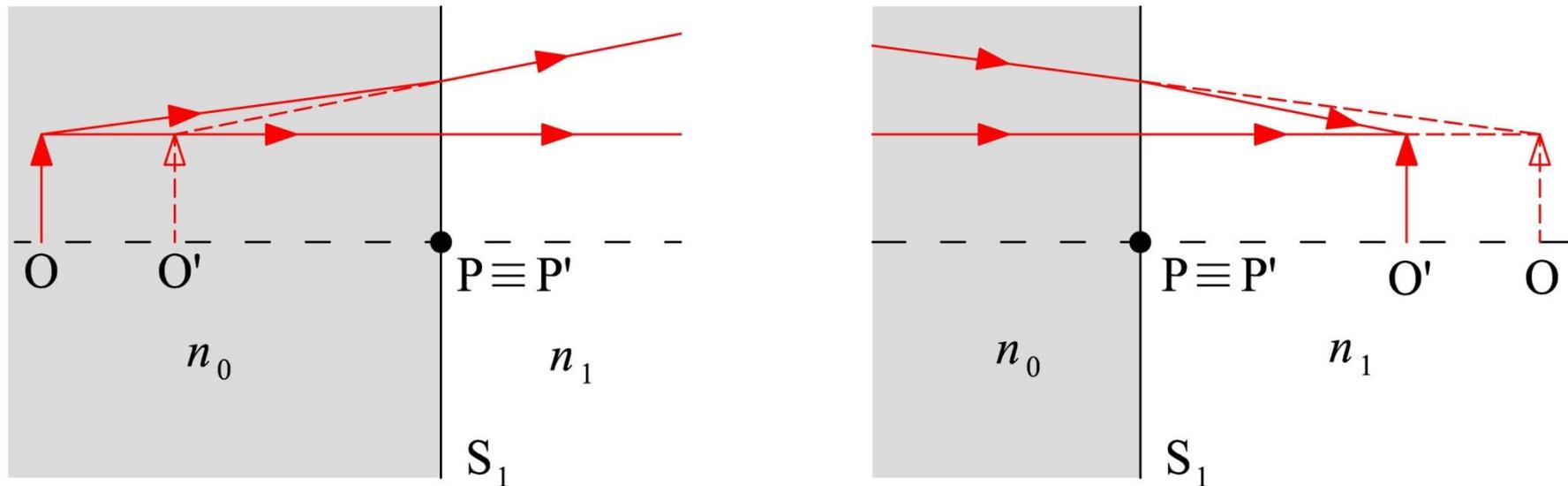
per $f' \Rightarrow \infty$ si semplificano in:

$$l' = \frac{n_1}{n_0} l$$

$$m = \frac{\eta'}{\eta} = 1$$

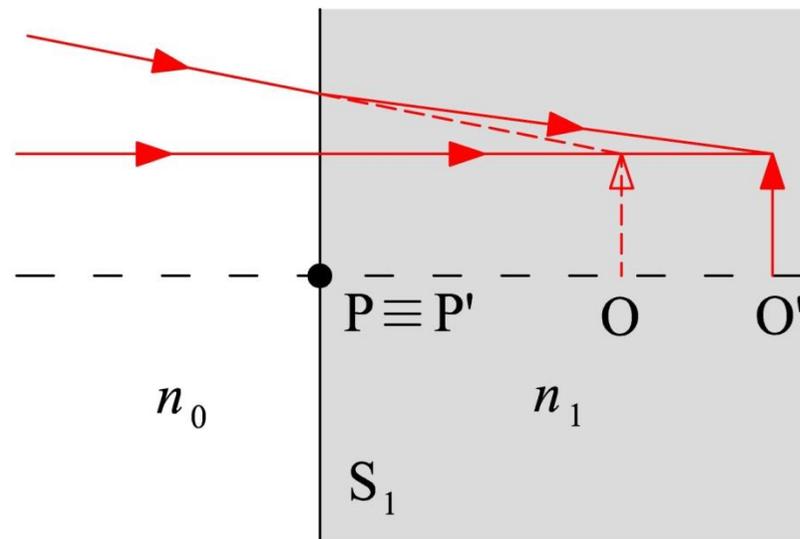
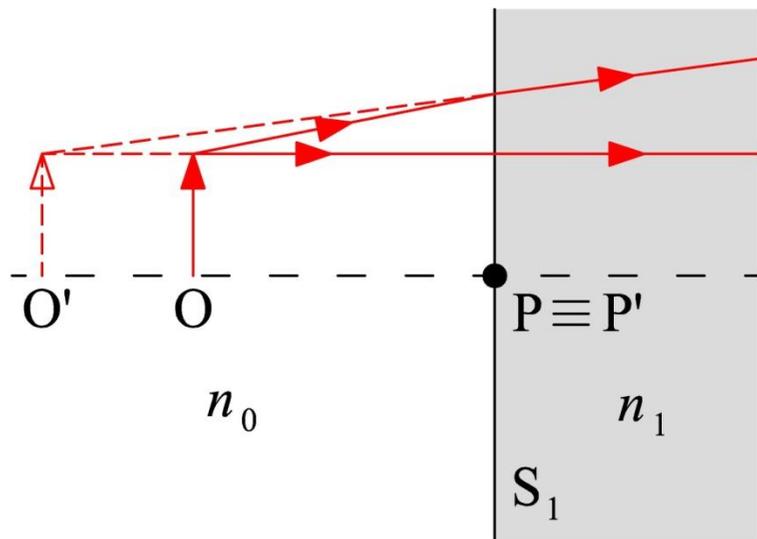
L'ingrandimento costantemente uguale all'unità implica che **l'immagine fatta da un diottro piano ha sempre la stessa orientazione e la stessa dimensione dell'oggetto**. Dalla legge di coniugazione, dovendo l ed l' avere sempre lo stesso segno, è facile ricavare che **se l'oggetto è reale**

l'immagine è virtuale e viceversa se l'oggetto è virtuale l'immagine è reale.



Inoltre se $n_0 > n_1$ l'immagine è più vicina dell'oggetto al diotto.

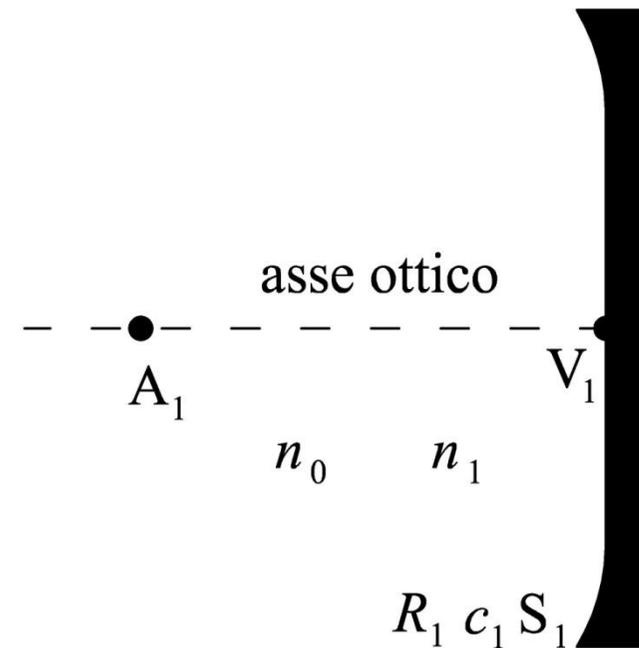
Mentre se $n_1 > n_0$ l'immagine è più lontana dell'oggetto dal diottro.



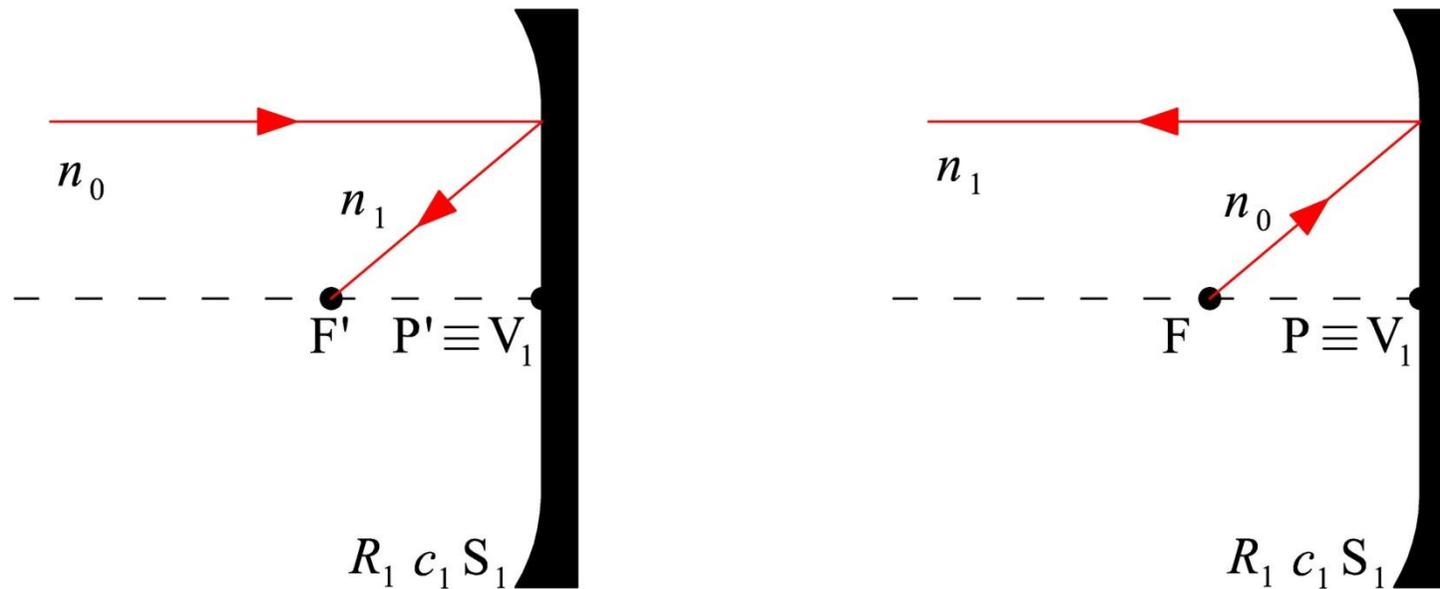
Lo specchio sferico

Consideriamo uno specchio sferico cioè un diottro sferico che separa un mezzo trasparente omogeneo ed isotropo da un mezzo non trasparente ad alta riflettanza.

Indichiamo con n_0 l'indice di rifrazione del mezzo trasparente alla lunghezza d'onda di interesse e con c_1 , R_1 , A_1 ed V_1 rispettivamente la curvatura, il raggio di curvatura, il centro ed il vertice del diottro considerato.



Indichiamo inoltre con n_1 l'indice di rifrazione del mezzo trasparente quando la luce si propaga in esso dopo la riflessione sullo specchio. In accordo con quanto detto nel capitolo 3 risulta $n_1 = -n_0$.



Come per il diottro in rifrazione, dalla figura è facile concludere che i piani principali di uno specchio sferico non possono altro che coincidere entrambi con lo specchio stesso. Di conseguenza i due punti principali coincidono tra di loro e coincidono con il vertice del diottro. Da

quest'ultima osservazione discende che $ffl = f$ e $bfl = f'$. Inoltre la relazione tra le due lunghezze focali effettive si semplifica nella seguente relazione:

$$f = f'$$

ovvero per un specchio sferico le due lunghezze focali effettive sono uguali, e questa proprietà unita alla coincidenza dei punti principali implica anche **la coincidenza dei due punti focali**.

Osservare che queste ultime due proprietà si possono ricavare anche direttamente dalla precedente figura applicando il principio di reversibilità della luce.

Per il calcolo delle due lunghezze focali effettive tracciamo un raggio meridiano parassiale parallelo all'asse ottico.

$$n_1 u'_1 = n_0 u_1 - (n_1 - n_0) c_1 y_1$$

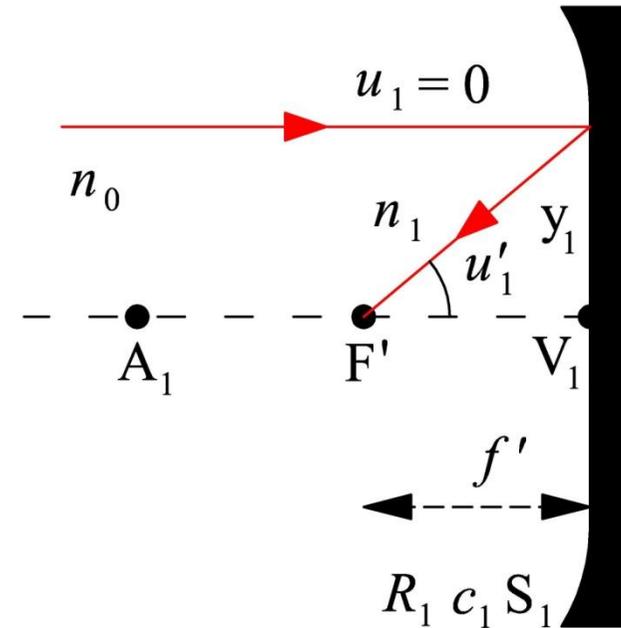
$$-n_0 u'_1 = -(-n_0 - n_0) c_1 y_1$$

$$-n_0 u'_1 = 2 n_0 c_1 y_1$$

$$u'_1 = -2 c_1 y_1$$

Utilizzando la formula per il calcolo di f' infine otteniamo:

$$f' = -\frac{y_1}{u'_1} = -\frac{y_1}{-2 c_1 y_1}$$



e quindi

$$f' = f = \frac{1}{2 c_1} = \frac{R_1}{2}$$

Inoltre direttamente dalla sua definizione discende che:

$$\Phi = \frac{n_1}{f'} = \frac{-n_0}{f'}$$

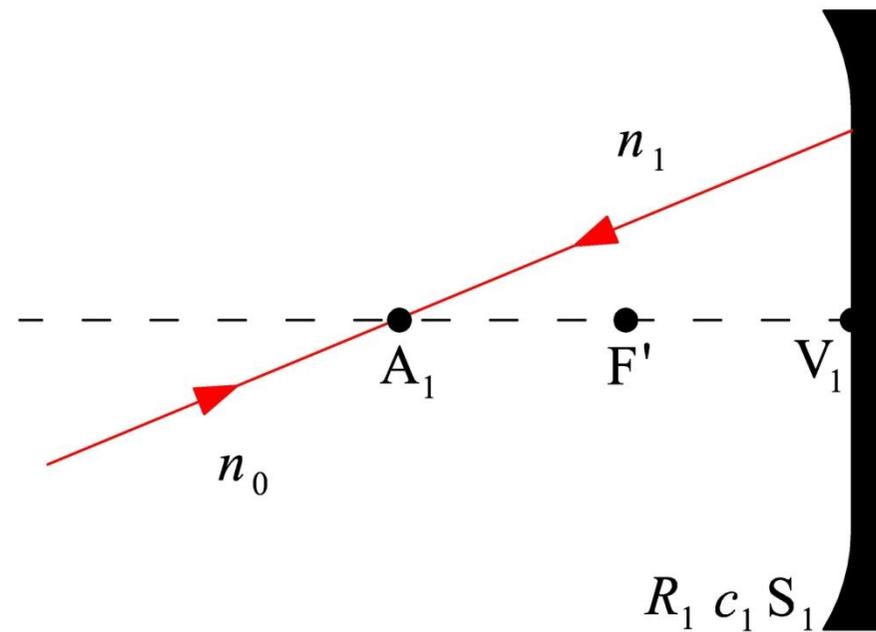
e quindi

$$\Phi = -\frac{2 n_0}{R_1} = -2 n_0 c_1$$

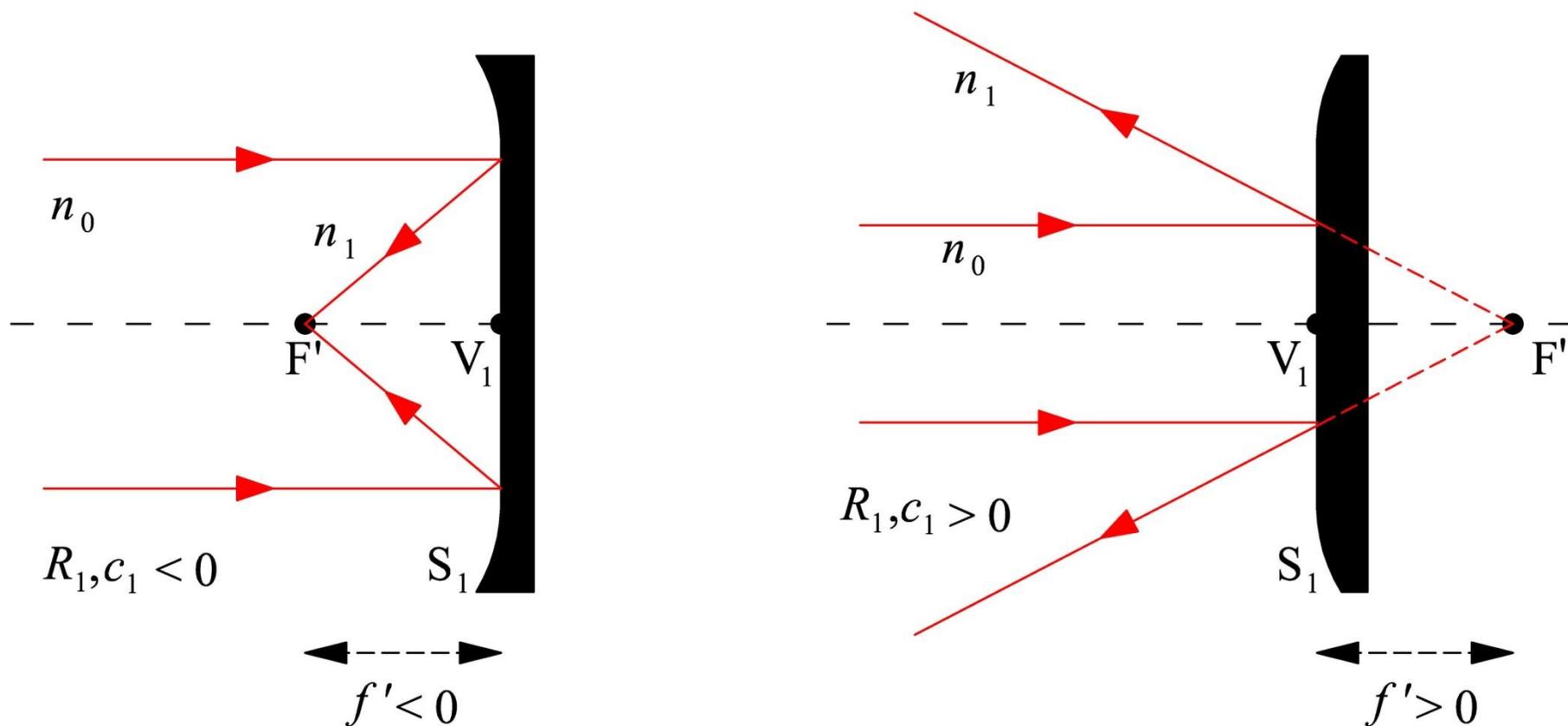
Anche per lo specchio sferico i punti nodali coincidono tra di loro e la loro distanza dai punti principali è data da:

$$l_N = l'_{N'} = \left(1 - \frac{n_0}{n_1}\right) f' = 2 \frac{R_1}{2} = R_1$$

ovvero i punti nodali di uno specchio sferico coincidono tra di loro e coincidono con il centro dello specchio.



Da quanto detto è facile vedere che quando $R_1, c_1 < 0$ la **focale** dello specchio è **negativa**, il **potere** è **positivo** e lo specchio è **convergente** essendo il suo secondo punto focale reale.



Analogamente quando $R_1, c_1 > 0$ la focale dello specchio è **positiva**, il **potere** è **negativo** e lo specchio è **divergente** essendo il suo secondo punto focale virtuale.

La legge di coniugazione e l'equazione dell'ingrandimento:

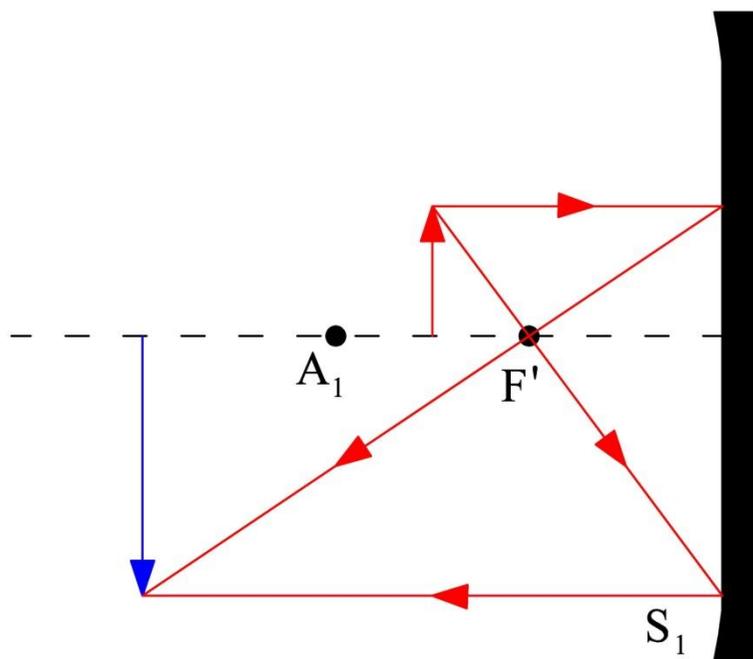
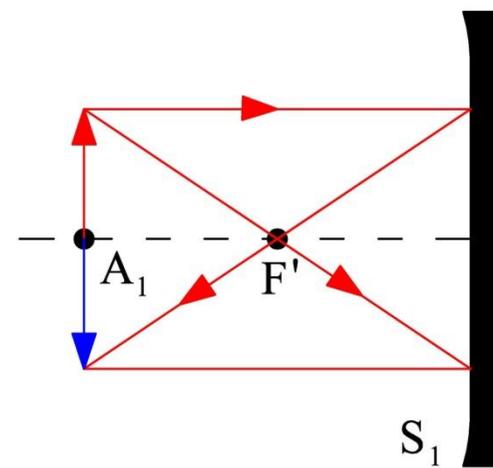
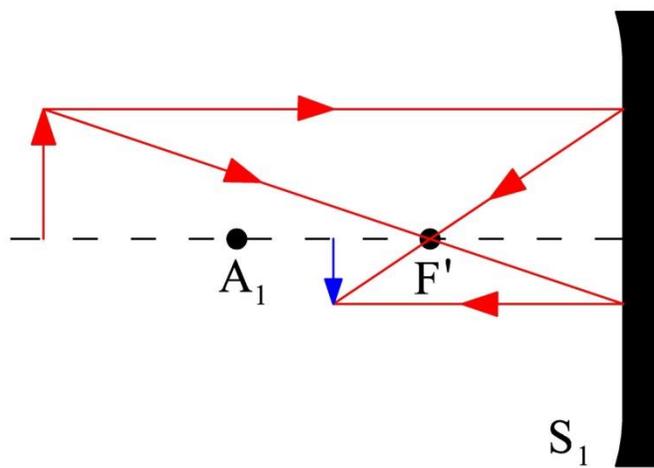
$$\frac{n_1}{l'} = \frac{n_0}{l} + \frac{n_1}{f'} \qquad m = \frac{\eta'}{\eta} = \frac{n_0 l'}{n_1 l}$$

per uno specchio sferico si semplificano in:

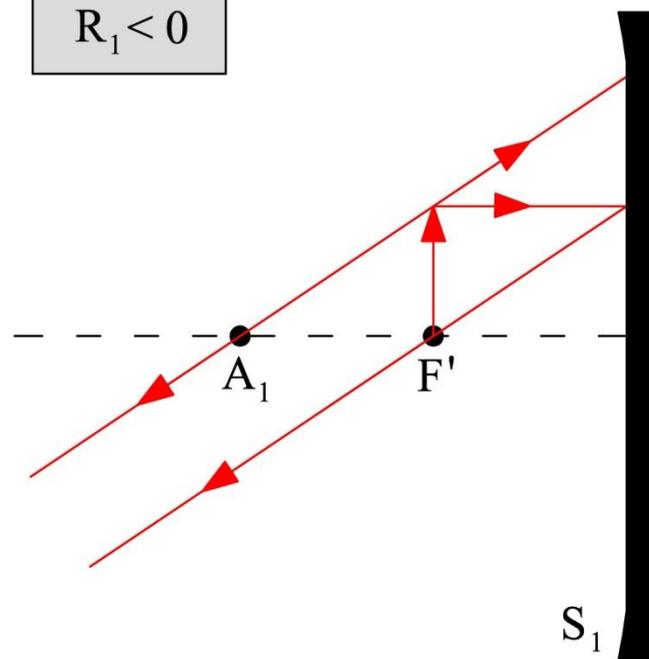
$$\frac{1}{l'} = -\frac{1}{l} + \frac{1}{f'}$$

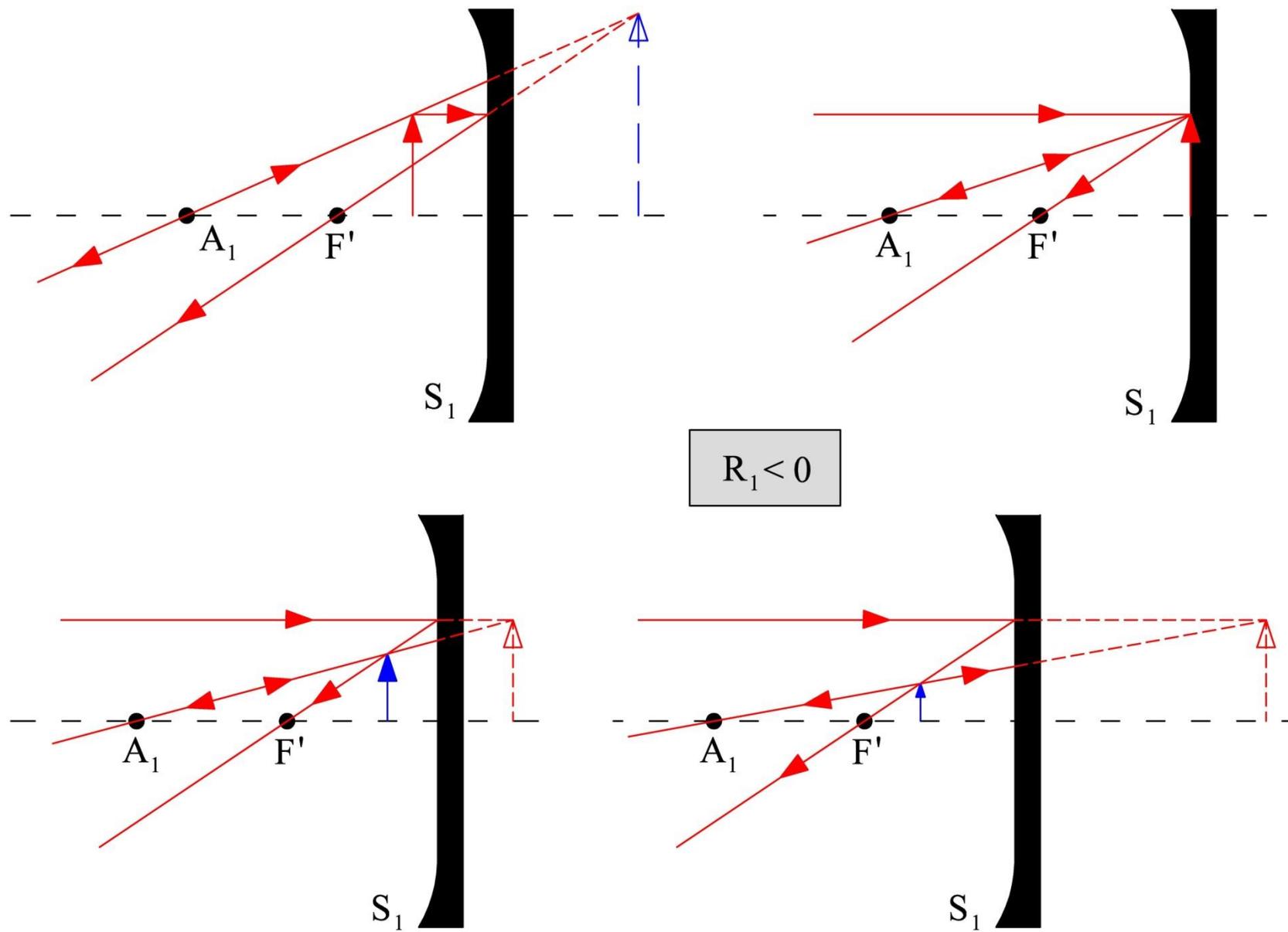
$$m = \frac{\eta'}{\eta} = -\frac{l'}{l}$$

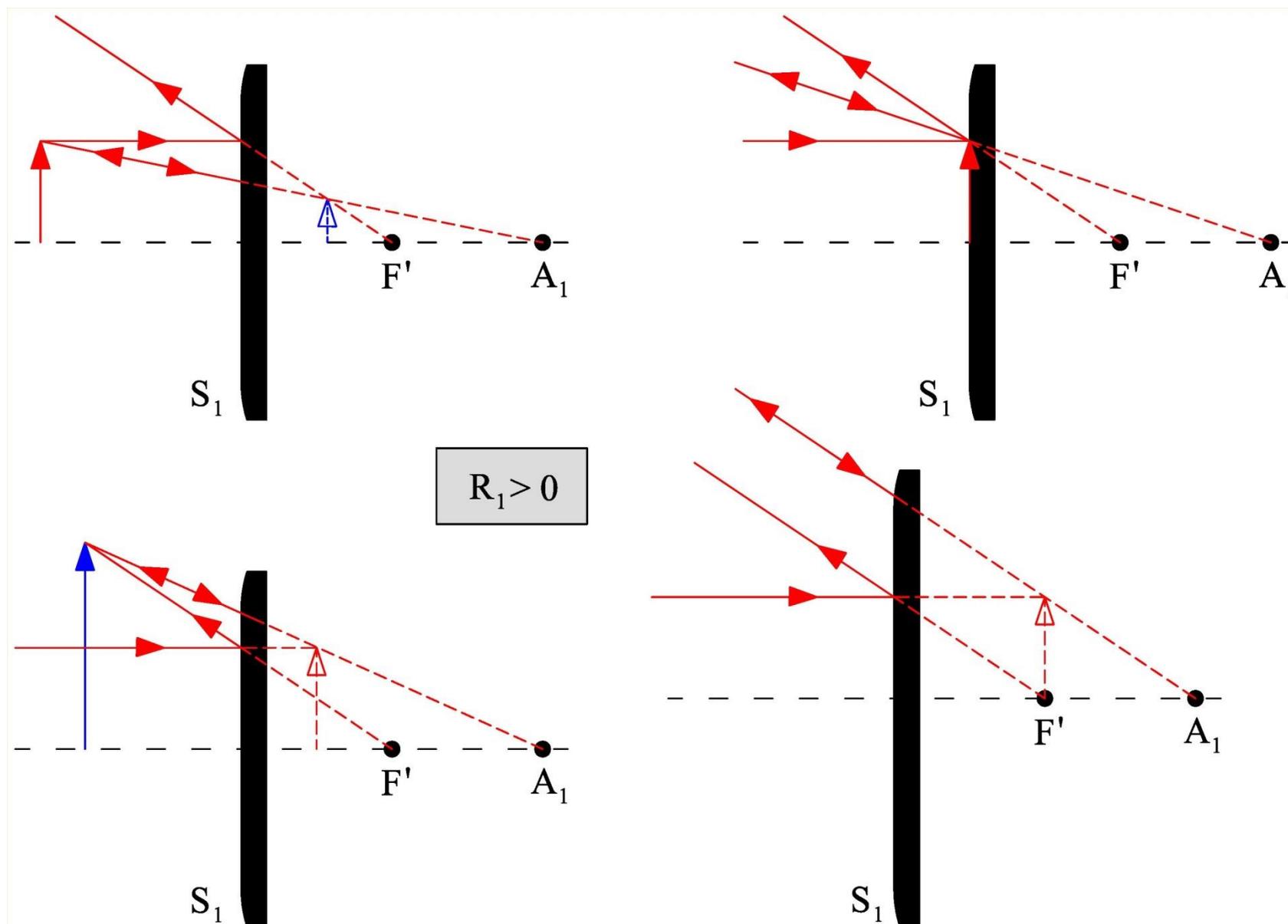
Da queste due ultime relazioni e dalla formula che permette di calcolare la focale dello specchio è facile concludere che **le proprietà di *imaging* di uno specchio sferico non dipendono dall'indice di rifrazione n_0 del mezzo trasparente omogeneo ed isotropo**. Infine tali proprietà sono illustrate nelle seguenti figure.

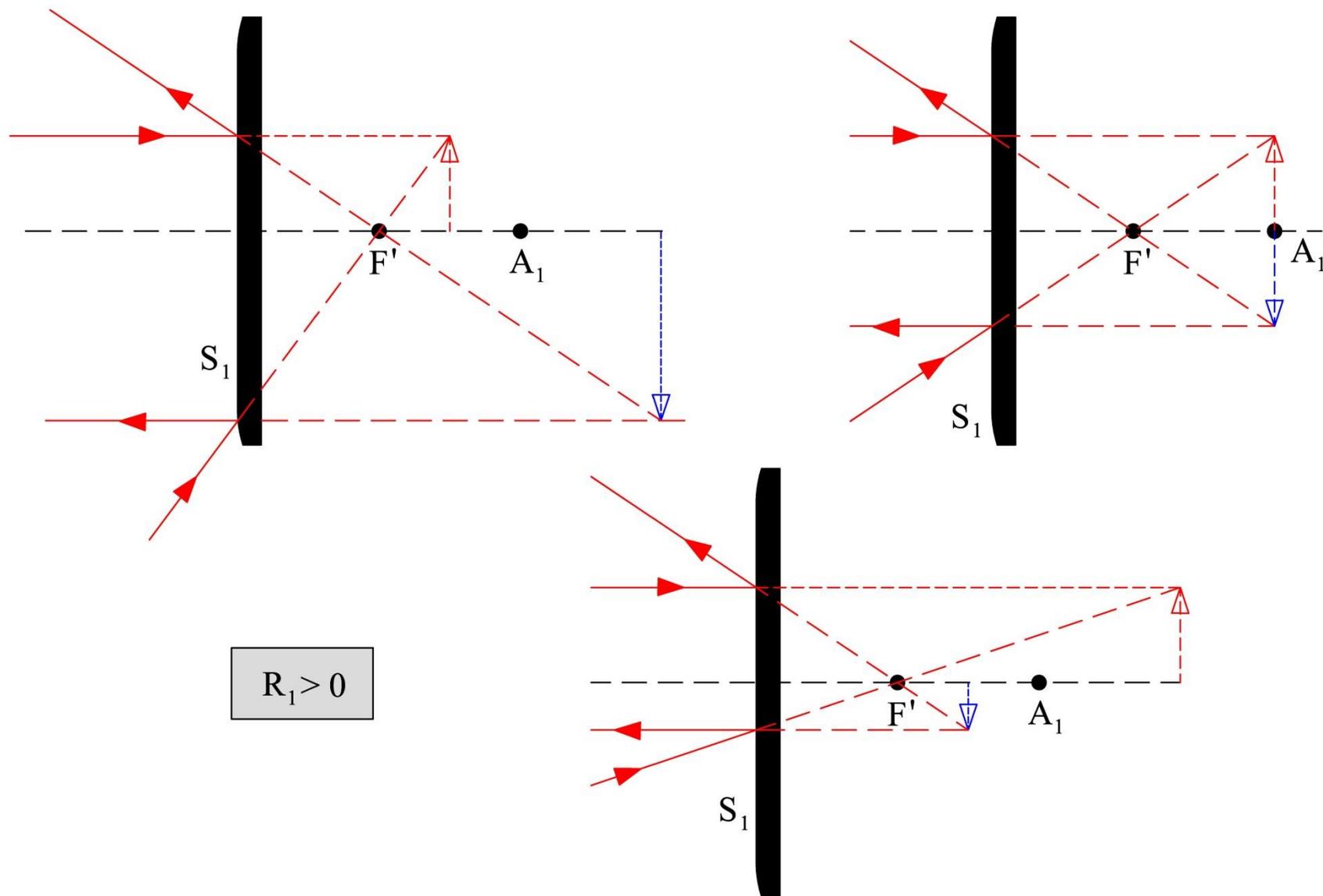


$$R_1 < 0$$

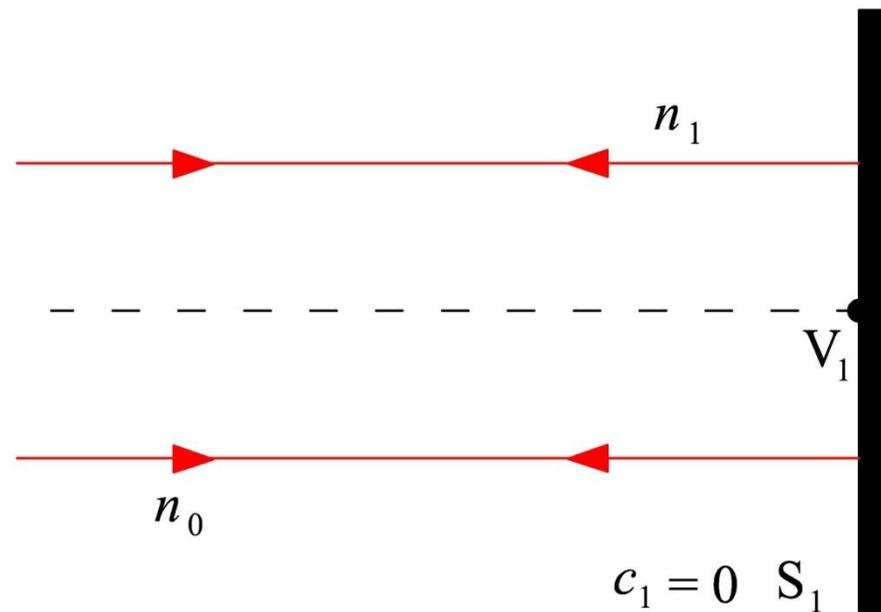




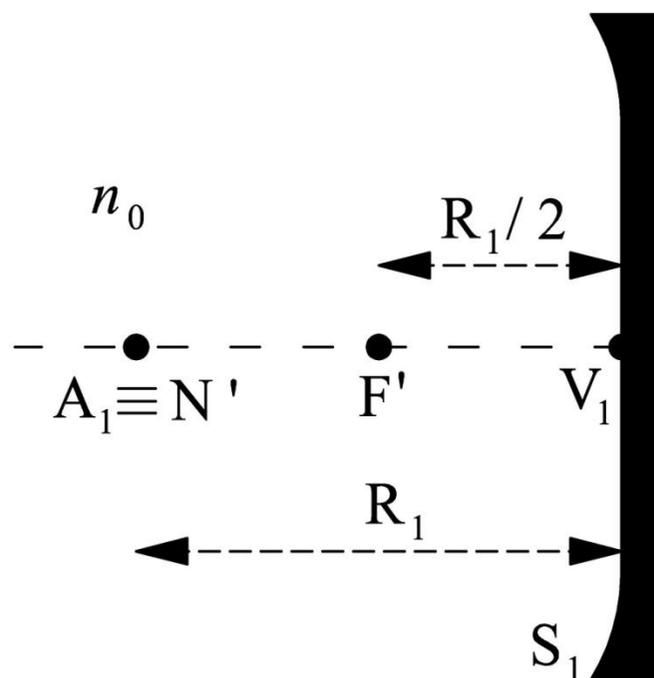




Consideriamo adesso il caso particolare di uno **specchio piano**. Come è mostrato in figura questo sistema ottico è **afocale**. Infatti tutti i raggi provenienti dalla sorgente puntiforme posta sull'asse all'infinito si trovano in condizioni di incidenza normale e quindi non vengono deviati durante la riflessione sullo specchio.



Guardando lo specchio piano come uno specchio sferico il cui raggio $R_1 \Rightarrow \infty$ è facile concludere che **anche per lo specchio piano i piani principali coincidono con lo specchio stesso**. Inoltre oltre i **piani focali** anche i **piani nodali** sono a distanza infinita dallo specchio.



La legge di coniugazione e l'equazione dell'ingrandimento:

$$\frac{1}{l'} = -\frac{1}{l} + \frac{1}{f'} \qquad m = \frac{\eta'}{\eta} = -\frac{l'}{l}$$

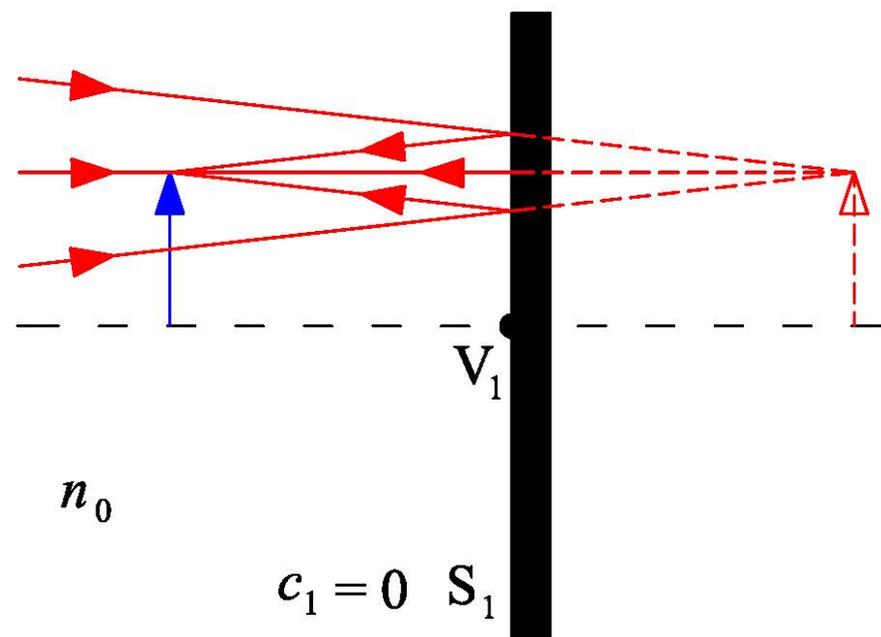
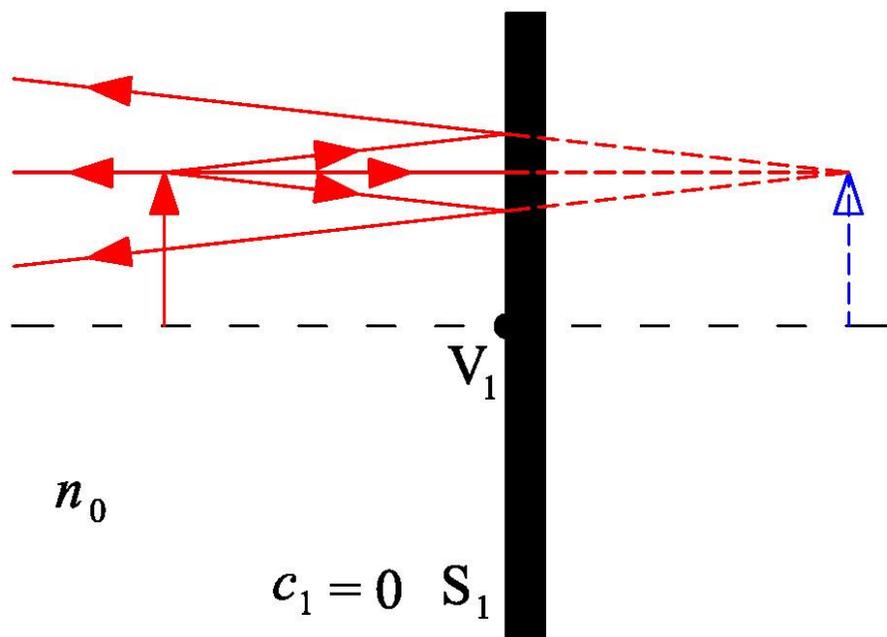
per $f' \Rightarrow \infty$ si semplificano in:

$$l' = -l$$

$$m = \frac{\eta'}{\eta} = 1$$

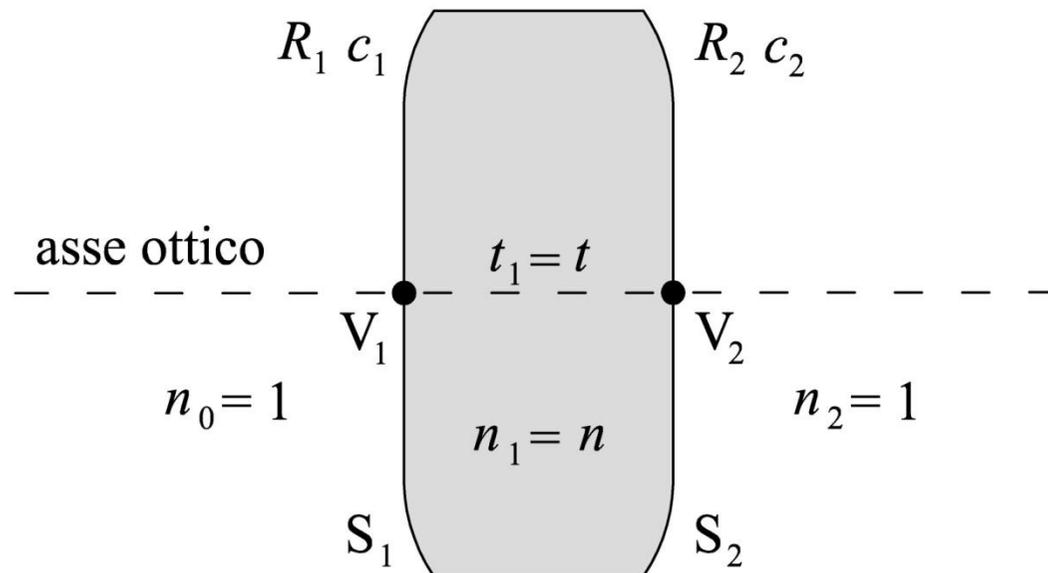
L'ingrandimento costantemente uguale all'unità implica che **l'immagine fatta da uno specchio piano ha sempre la stessa orientazione e la stessa dimensione dell'oggetto**. Inoltre, dovendo l ed l' essere sempre discordi, è facile ricavare che **l'oggetto e la corrispondente immagine stanno da**

parti opposte rispetto allo specchio, e se l'oggetto è reale l'immagine è virtuale e viceversa se l'oggetto è virtuale l'immagine è reale.



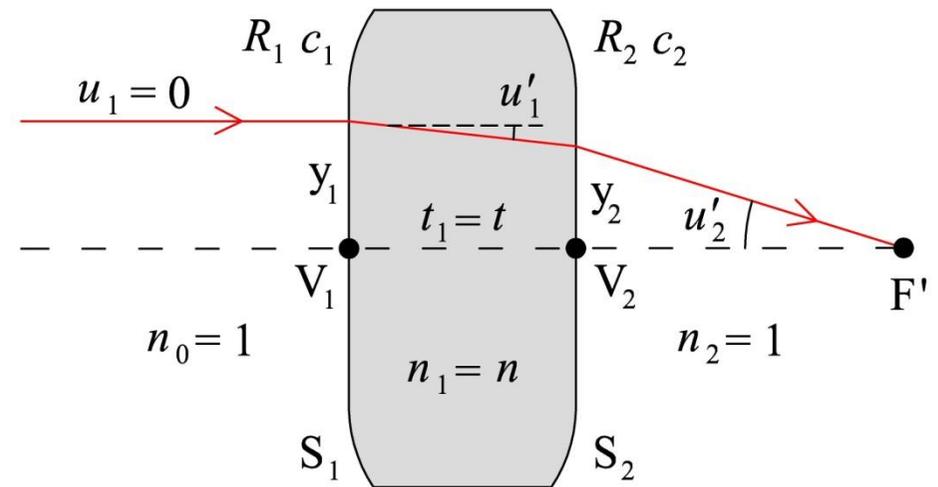
La lente spessa in aria

Una **lente spessa in aria** è definita da **due diottri sferici** che separano il mezzo trasparente omogeneo ed isotropo, di cui è fatta la lente, dall'aria che la circonda.



Come indicato nella precedente figura, indichiamo con n l'indice di rifrazione del mezzo di cui è fatta la lente alla lunghezza d'onda di interesse, con t lo spessore al centro, cioè la distanza tra i vertici V_1 e V_2 dei due diottri, e con R_1, c_1, R_2, c_2 rispettivamente il raggio di curvatura e la curvatura di S_1 e S_2 .

Per il calcolo delle due lunghezze focali effettive, che in questo caso coincidono in valore assoluto avendo supposto la lente immersa in aria ($n_0 = n_2$), e della lunghezza focale posteriore tracciamo un raggio meridiano parassiale parallelo alla asse ottico.



$$n u'_1 = u_1 - (n - 1) c_1 y_1$$

$$u'_1 = -\frac{n - 1}{n} c_1 y_1$$

$$y_2 = y_1 + t u'_1$$

$$y_2 = \left(1 - \frac{n - 1}{n} t c_1\right) y_1$$

$$u'_2 = n u'_1 - (1 - n) c_2 y_2$$

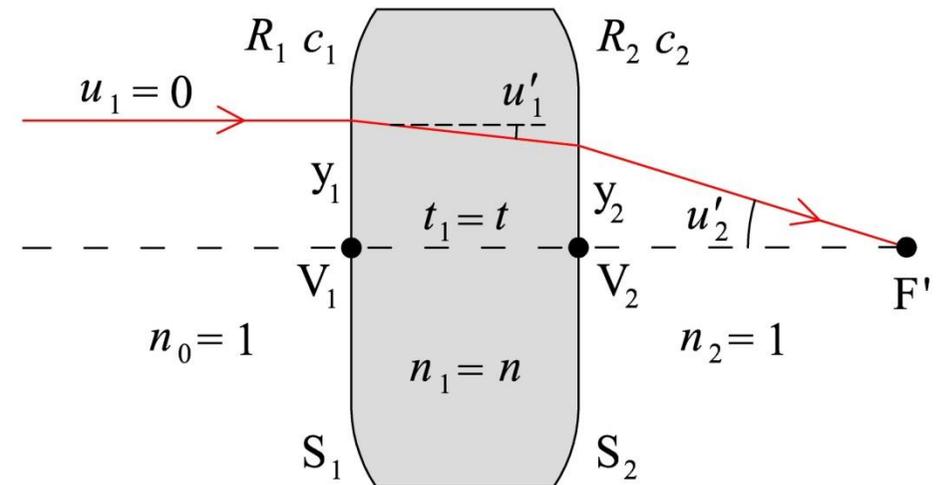
$$u'_2 = -(n - 1) c_1 y_1 + (n - 1) c_2 y_2$$

$$u'_2 = (n - 1) y_1 \cdot$$

$$\cdot \left[-c_1 + c_2 \left(1 - \frac{n - 1}{n} t c_1\right) \right]$$

$$u'_2 = (n - 1) y_1 \cdot$$

$$\cdot \left[-c_1 + c_2 - \frac{n - 1}{n} t c_1 c_2 \right]$$



Allora il potere Φ della lente spessa è dato da:

$$\Phi = \frac{n_2}{f'} = \frac{1}{f'} = -\frac{u'_2}{y_1} = -(n-1) \left[-c_1 + c_2 - \frac{n-1}{n} t c_1 c_2 \right]$$

e indicando con Φ_1 e Φ_2 i poteri dei due diottri che costituiscono la lente può essere riscritto nella seguente forma:

$$\Phi_1 = (n-1) c_1$$

$$\Phi_2 = (1-n) c_2$$

$$\Phi = \frac{1}{f'} = \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_1 \cdot \Phi_2 \cdot \frac{t}{n}$$

Inoltre la lunghezza focale posteriore bfl è data da:

$$bfl = -\frac{y_2}{u'_2} = -\frac{\left(1 - \frac{n-1}{n} t c_1\right) y_1}{-\Phi y_1}$$

e quindi:

$$bfl = \frac{1 - \Phi_1 \cdot \frac{t}{n}}{\Phi}$$

Per il calcolo della lunghezza focale anteriore ffl tracciamo un raggio meridiano parassiale parallelo alla asse ottico attraverso la lente spessa invertita.

$$n \hat{u}'_2 = \hat{u}_2 - (n - 1)(-c_2) \hat{y}_2$$

$$\hat{u}'_2 = \frac{n - 1}{n} c_2 \hat{y}_2$$

$$\hat{y}_1 = \hat{y}_2 + t \hat{u}'_2$$

$$\hat{y}_1 = \left(1 + \frac{n - 1}{n} t c_2\right) \hat{y}_2$$

$$\hat{u}'_1 = n \hat{u}'_2 - (1 - n)(-c_1) \hat{y}_1$$

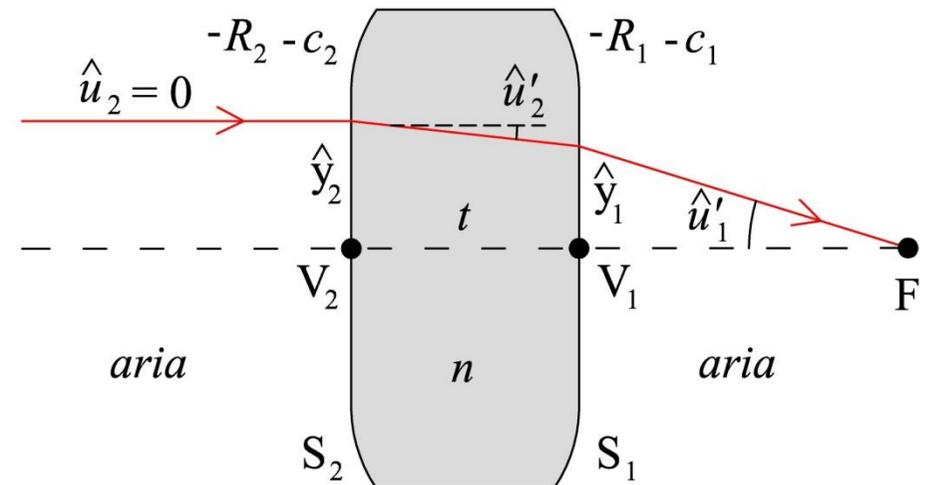
$$\hat{u}'_1 = (n - 1) c_2 \hat{y}_2 - (n - 1) c_1 \hat{y}_1$$

$$\hat{u}'_1 = (n - 1) \hat{y}_2 \cdot$$

$$\cdot \left[c_2 - c_1 \left(1 + \frac{n - 1}{n} t c_2\right) \right]$$

$$\hat{u}'_1 = (n - 1) \hat{y}_2 \cdot$$

$$\cdot \left[-c_1 + c_2 - \frac{n - 1}{n} t c_1 c_2 \right]$$



Quindi riassumendo abbiamo trovato che:

$$\hat{y}_1 = \left(1 + \frac{n-1}{n} t c_2\right) \hat{y}_2 \Rightarrow$$

$$\hat{y}_1 = \left(1 - \Phi_2 \cdot \frac{t}{n}\right) \hat{y}_2$$

$$\hat{u}'_1 = (n-1) \hat{y}_2 \cdot \left[-c_1 + c_2 - \frac{n-1}{n} t c_1 c_2\right] \Rightarrow$$

$$\hat{u}'_1 = -(n-1) \hat{y}_2 \cdot \left[c_1 - c_2 + \frac{n-1}{n} t c_1 c_2\right] \Rightarrow$$

$$\hat{u}'_1 = -\hat{y}_2 \cdot \left[\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_1 \cdot \Phi_2 \cdot \frac{t}{n}\right] \Rightarrow$$

$$\hat{u}'_1 = -\hat{y}_2 \cdot \Phi$$

Allora la lunghezza focale anteriore ffl è data da:

$$ffl = -\widehat{ffl} = -\left(-\frac{\hat{y}_1}{\hat{u}'_1}\right) = \frac{\left(1 - \Phi_2 \cdot \frac{t}{n}\right) \hat{y}_2}{-\hat{y}_2 \cdot \Phi}$$

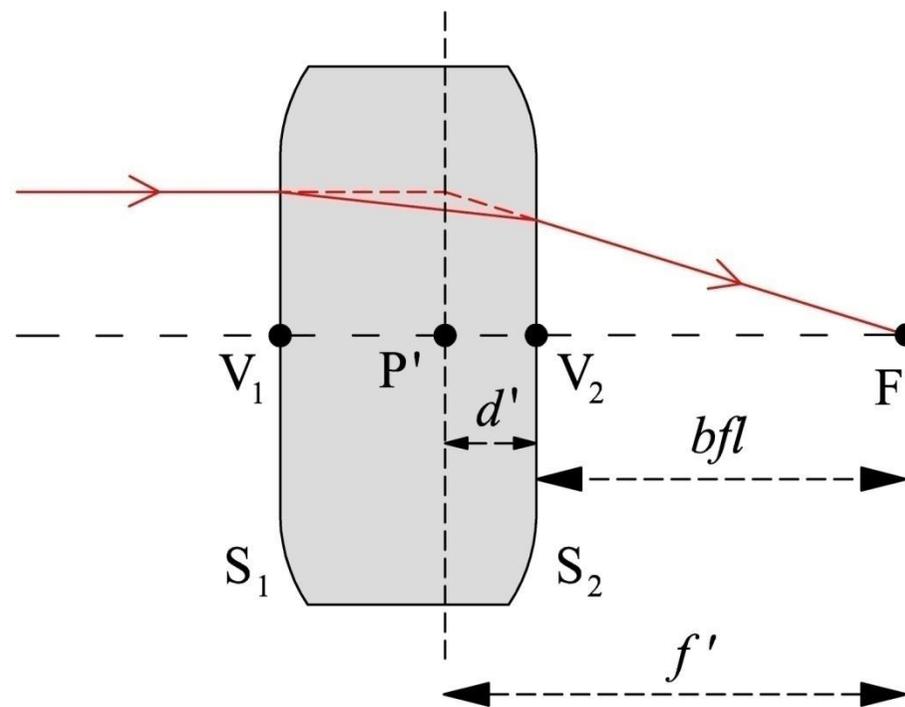
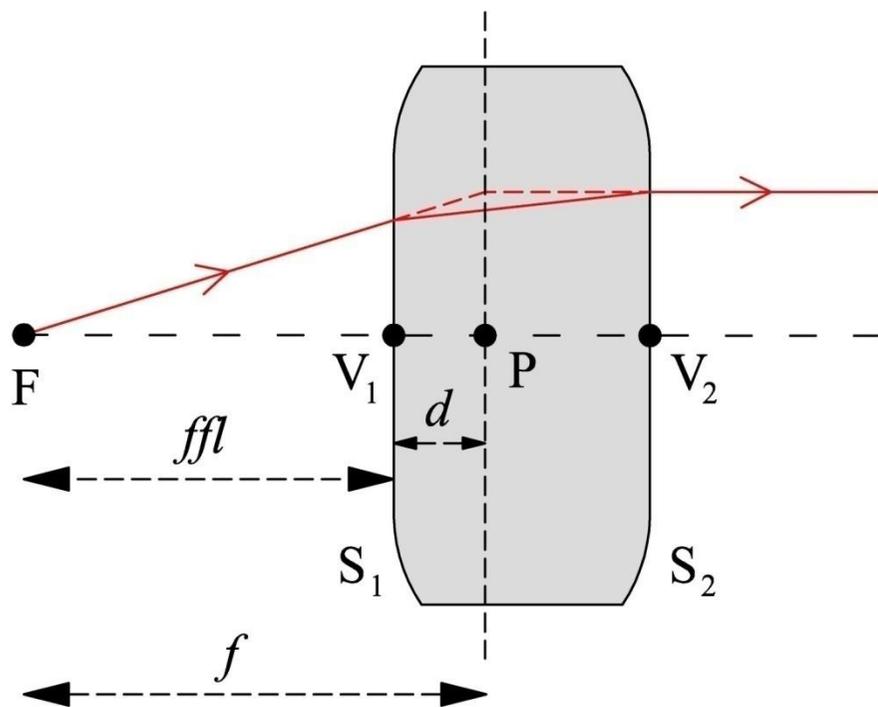
e quindi:

$$ffl = -\frac{\left(1 - \Phi_2 \cdot \frac{t}{n}\right)}{\Phi}$$

Per l'individuazione della posizione del primo punto principale P rispetto al vertice V_1 del primo diottro della lente e del secondo punto principale P' rispetto al vertice V_2 del secondo diottro, è conveniente introdurre le distanza d e d' definite dalla seguente relazione:

$$d = ffl - f$$

$$d' = bfl - f'$$



P' è a sinistra di V_2 quando $d' < 0$, e analogamente P è a destra di V_1 quando $d > 0$.

Utilizzando i risultati sopra riportati è facile mostrare che:

$$d = ffl - f = ffl + f' = - \frac{\left(1 - \Phi_2 \cdot \frac{t}{n}\right)}{\Phi} + \frac{1}{\Phi}$$

$$d' = bfl - f' = \frac{1 - \Phi_1 \cdot \frac{t}{n}}{\Phi} - \frac{1}{\Phi}$$

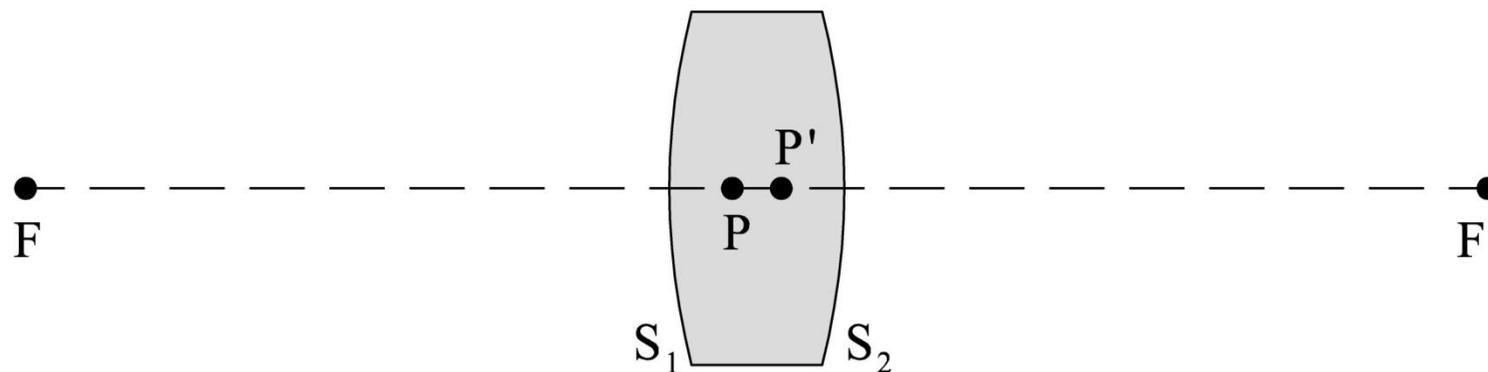
e quindi:

$$d = ffl - f = \frac{\Phi_2}{\Phi} \cdot \frac{t}{n}$$

$$d' = bfl - f' = - \frac{\Phi_1}{\Phi} \cdot \frac{t}{n}$$

Nelle seguenti tabelle le formule precedentemente ottenute sono applicate a diversi tipi di lenti spesse.

LENTE EQUICONVESSA



$$R_1 = 100 \text{ mm}$$

$$\Phi = 10 \mathcal{D}$$

$$R_2 = -100 \text{ mm}$$

$$f' = 101 \text{ mm}$$

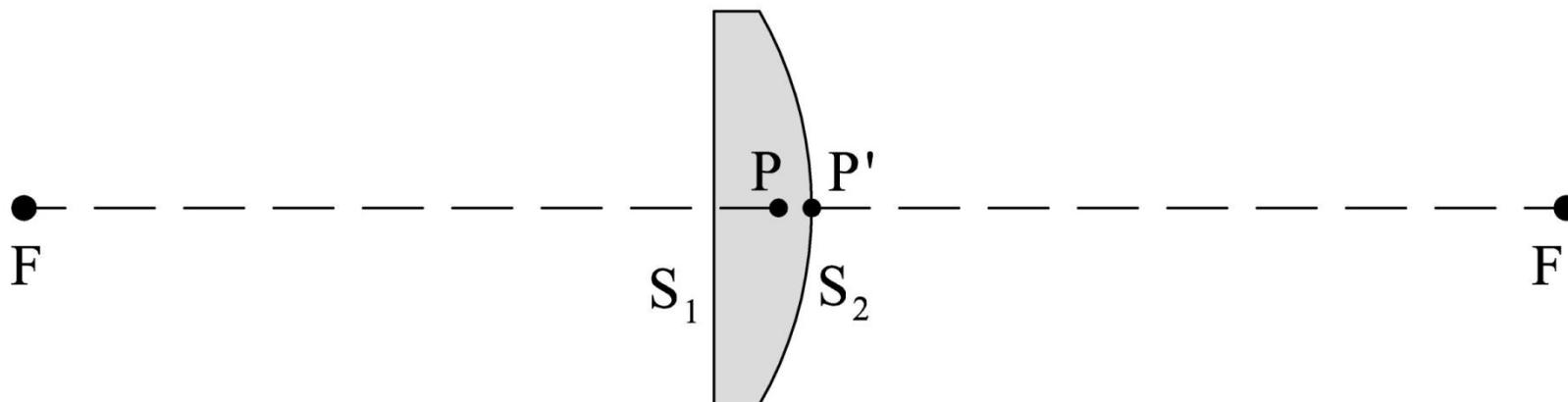
$$t = 25 \text{ mm}$$

$$d = 9 \text{ mm}$$

$$n = 1.517$$

$$d' = -9 \text{ mm}$$

LENTE PIANO – CONVESSA



$$R_1 = \infty$$

$$\Phi = 5 \mathcal{D}$$

$$R_2 = -100 \text{ mm}$$

$$f' = 193 \text{ mm}$$

$$t = 25 \text{ mm}$$

$$d = 16.5 \text{ mm}$$

$$n = 1.517$$

$$d' = 0 \text{ mm}$$

Essendo il diottro S_1 piano abbiamo che:

$$c_1 = 0 \Rightarrow \Phi_1 = 0 \Rightarrow \Phi = \Phi_2$$

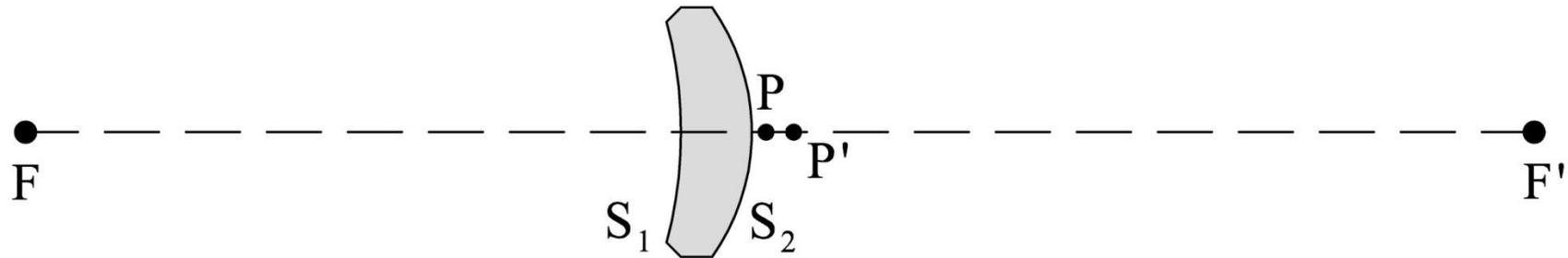
e quindi le formule che forniscono la posizione dei due punti principali si semplificano in :

$$d = ffl - f = \frac{t}{n}$$

$$d' = bfl - f' = 0$$

Per una lente piano convessa, avente il primo diottro piano, il secondo punto principale coincide con il vertice del secondo diottro e la posizione del primo punto principale è indipendente dalla curvatura del secondo diottro.

MENISCO POSITIVO



$$R_1 = -120 \text{ mm}$$

$$\Phi = 5 \mathcal{D}$$

$$R_2 = -60 \text{ mm}$$

$$f' = 208 \text{ mm}$$

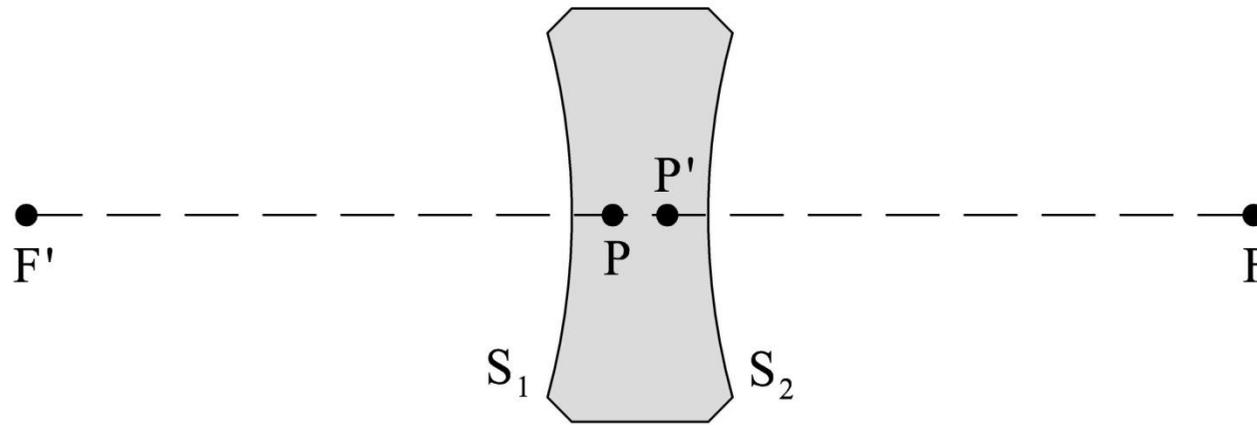
$$t = 20 \text{ mm}$$

$$d = 24 \text{ mm}$$

$$n = 1.517$$

$$d' = 12 \text{ mm}$$

LENTE EQUICONCAVA



$$R_1 = -100 \text{ mm}$$

$$\Phi = -11 \text{ D}$$

$$R_2 = 100 \text{ mm}$$

$$f' = -93.5 \text{ mm}$$

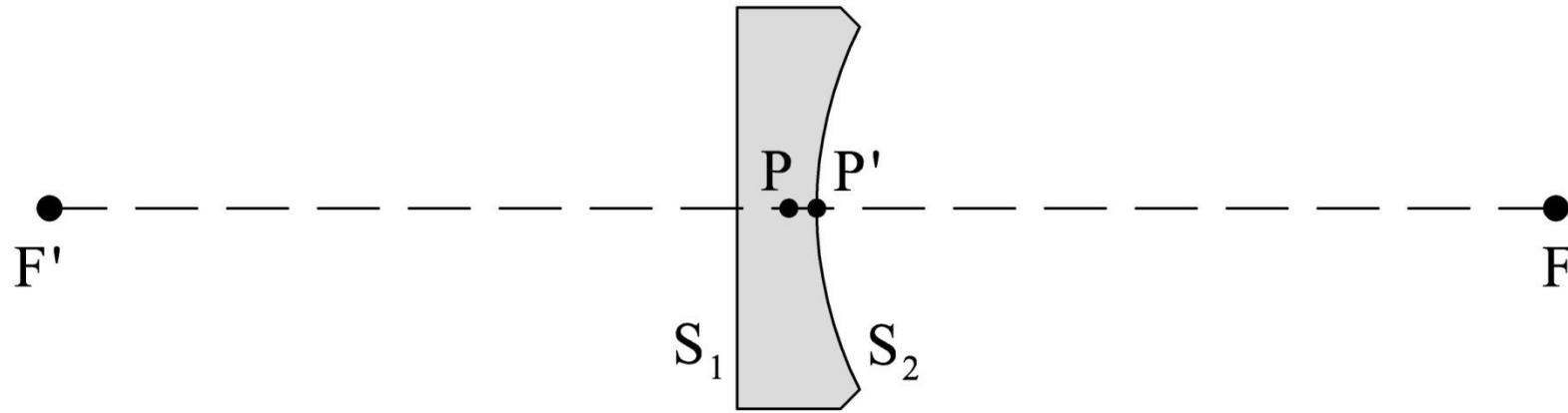
$$t = 20 \text{ mm}$$

$$d = 6 \text{ mm}$$

$$n = 1.517$$

$$d' = -6 \text{ mm}$$

LENTE PIANO – CONCAVA



$$R_1 = \infty$$

$$\Phi = -5 \mathcal{D}$$

$$R_2 = 100 \text{ mm}$$

$$f' = -193 \text{ mm}$$

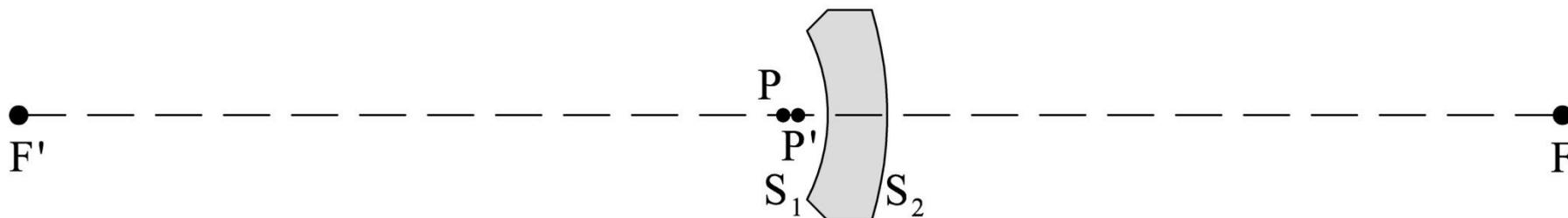
$$t = 20 \text{ mm}$$

$$d = 13 \text{ mm}$$

$$n = 1.517$$

$$d' = 0 \text{ mm}$$

MENISCO NEGATIVO



$$R_1 = -60 \text{ mm}$$

$$\Phi = -4 \mathcal{D}$$

$$R_2 = -120 \text{ mm}$$

$$f' = -262 \text{ mm}$$

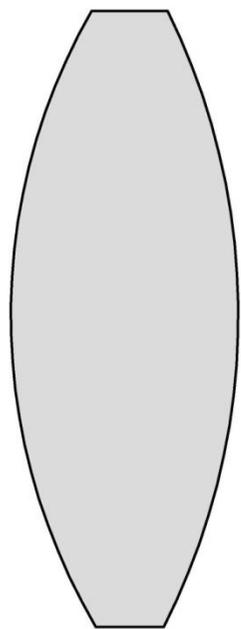
$$t = 20 \text{ mm}$$

$$d = -15 \text{ mm}$$

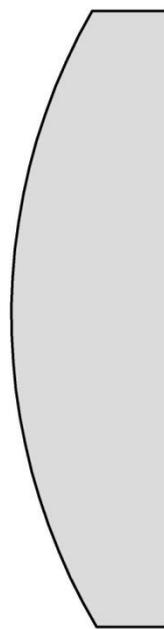
$$n = 1.517$$

$$d' = -30 \text{ mm}$$

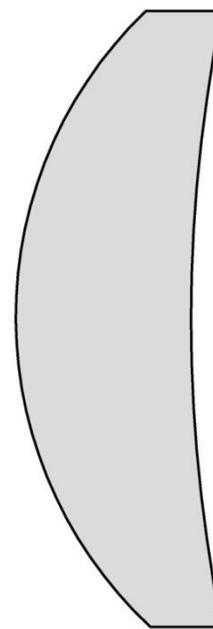
Dalla precedente analisi si può concludere che **le lenti spesse convergenti** hanno tutte **la focale ed il potere positivi** e che sono **più spesse al centro che al bordo**.



biconvessa

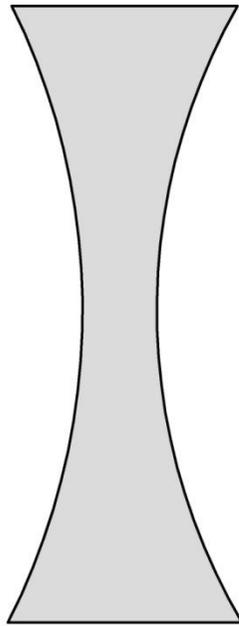


piano convessa

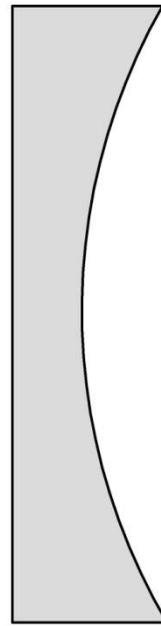


menisco positivo

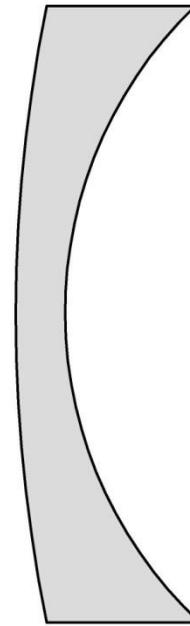
Analogamente **le lenti spesse divergenti** hanno tutte la **focale ed il potere negativi** e sono **più spesse al bordo che al centro**.



biconcava

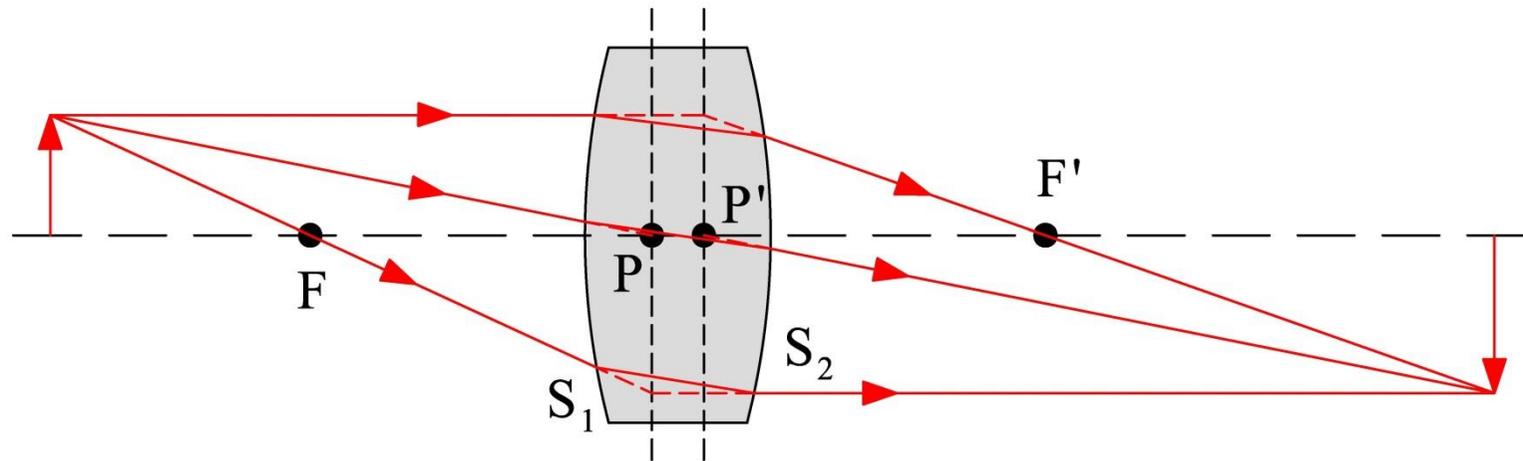


piano - concava



menisco negativo

Infine nella seguente figura è mostrato un esempio di formazione di una immagine nel caso di una lente spessa equiconvessa.

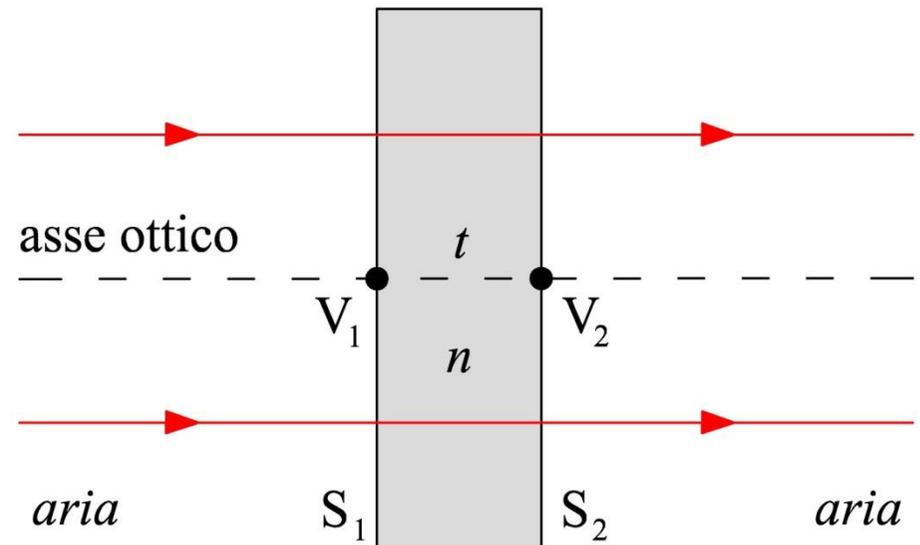


Dalla figura si vede facilmente che in questo caso è possibile tracciare i tre raggi utilizzati nella costruzione grafica anche all'interno della lente. Infatti per ciascuno di essi la costruzione grafica fornisce i punti di incidenza sui due diottri e quindi, per la legge della propagazione rettilinea della luce, anche i raggi all'interno della lente.

La lamina a facce piane e parallele in aria

Una **lamina a facce piane e parallele in aria** è definita da **due diottri piani paralleli** che separano il mezzo trasparente omogeneo ed isotropo, di cui è fatta la lamina, dall'aria che la circonda

Come è mostrato in figura questo sistema ottico è **afocale**. Infatti tutti i raggi provenienti dalla sorgente puntiforme posta sull'asse all'infinito si trovano in condizioni di incidenza normale su tutti e due i diottri e quindi non vengono deviati attraversando la lamina.

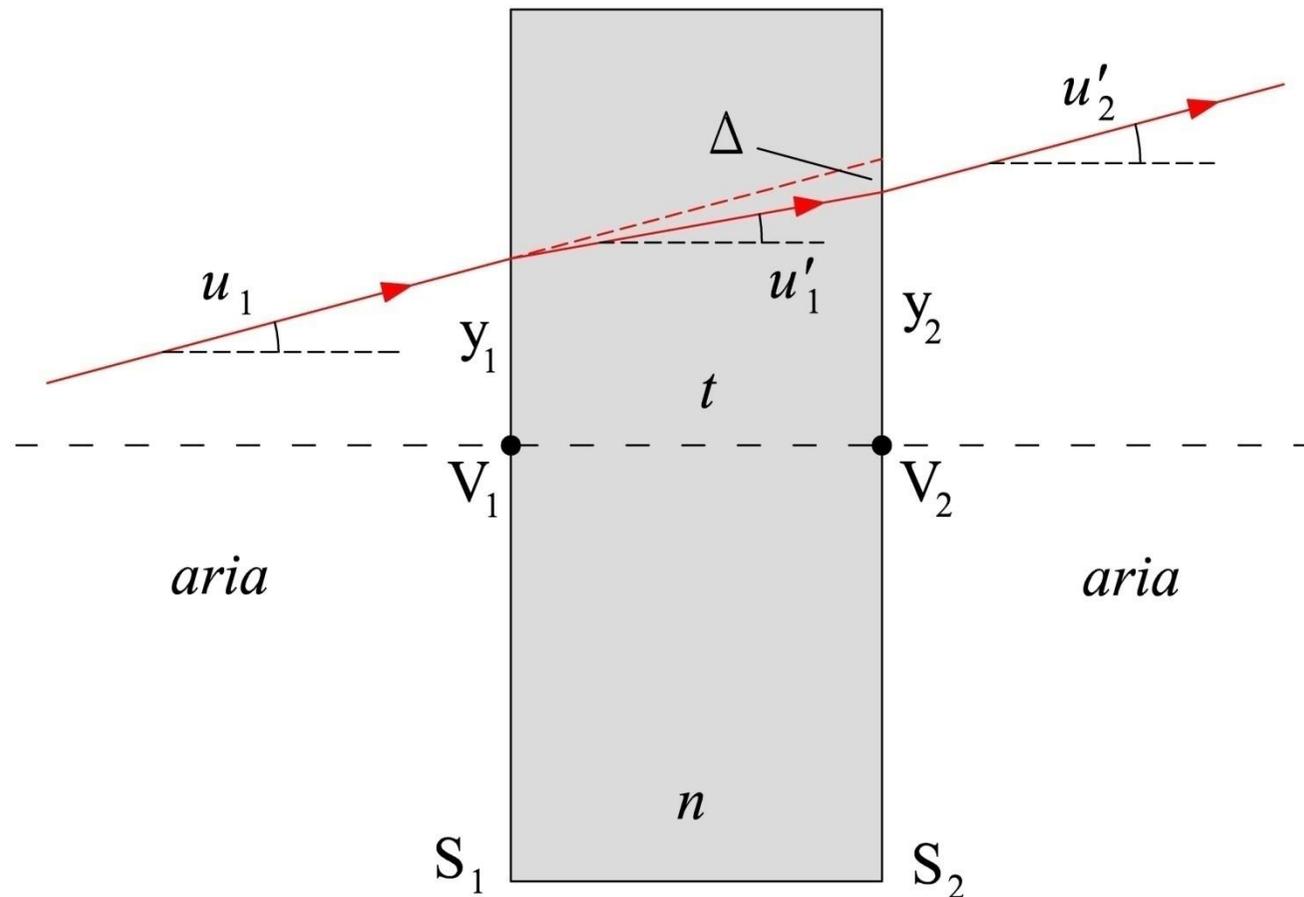


Come indicato nella precedente figura, indichiamo con n l'indice di rifrazione del mezzo di cui è fatta la lamina, alla lunghezza d'onda di interesse, e con t il suo spessore.

A differenza degli altri due sistemi ottici afocali che abbiamo fin qui incontrato, il diottro piano in rifrazione e lo specchio piano, **per la lamina a facce piane e parallele**, come per un generico sistema ottico afocale, **i piani principali non sono definiti**. Il considerare una lamina come una lente spessa nel limite per $R_1, R_2 \rightarrow \infty$ non aiuta nell'individuazione dei piani principali, in quanto il posizionamento di quest'ultimi dipende dalla tipologia di lente inizialmente considerata.

Tutto ciò implica che per la lamina a facce piane e parallele non si può applicare direttamente la legge di coniugazione e l'equazione dell'ingrandimento.

Per studiare le proprietà di imaging di una lamina a facce piane e parallele cominciamo con il tracciare attraverso di essa un generico raggio meridiano parassiale che su S_1 è individuato dalle coordinate u_1 e y_1 .



Dalle formule per il tracciamento di un raggio meridiano parassiale si ottiene:

$$n u'_1 = u_1 - (n - 1) c_1 y_1 \quad \Rightarrow \quad u'_1 = \frac{u_1}{n}$$

$$y_2 = y_1 + t u'_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + t \frac{u_1}{n}$$

$$u'_2 = n u'_1 - (1 - n) c_2 y_2 \quad \Rightarrow \quad u'_2 = u_1$$

Determiniamo poi l'altezza \tilde{y}_2 che compete sul diottro S_2 al prolungamento del raggio incidente su S_1 :

$$\tilde{y}_2 = y_1 + t u_1$$

e valutiamo la distanza Δ indicata nella precedente figura:

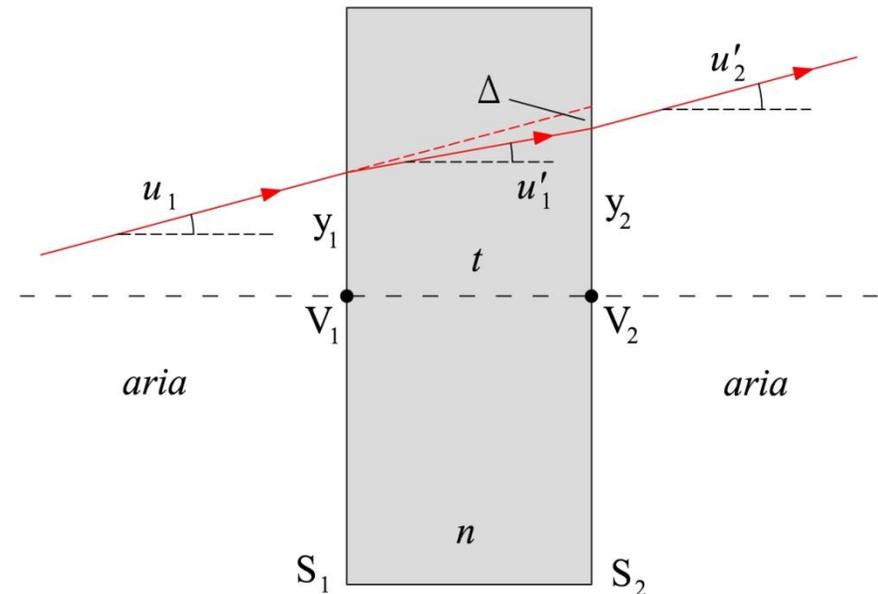
$$\Delta = y_2 - \tilde{y}_2 = - \left(1 - \frac{1}{n} \right) t u_1$$

Riassumendo abbiamo trovato che:

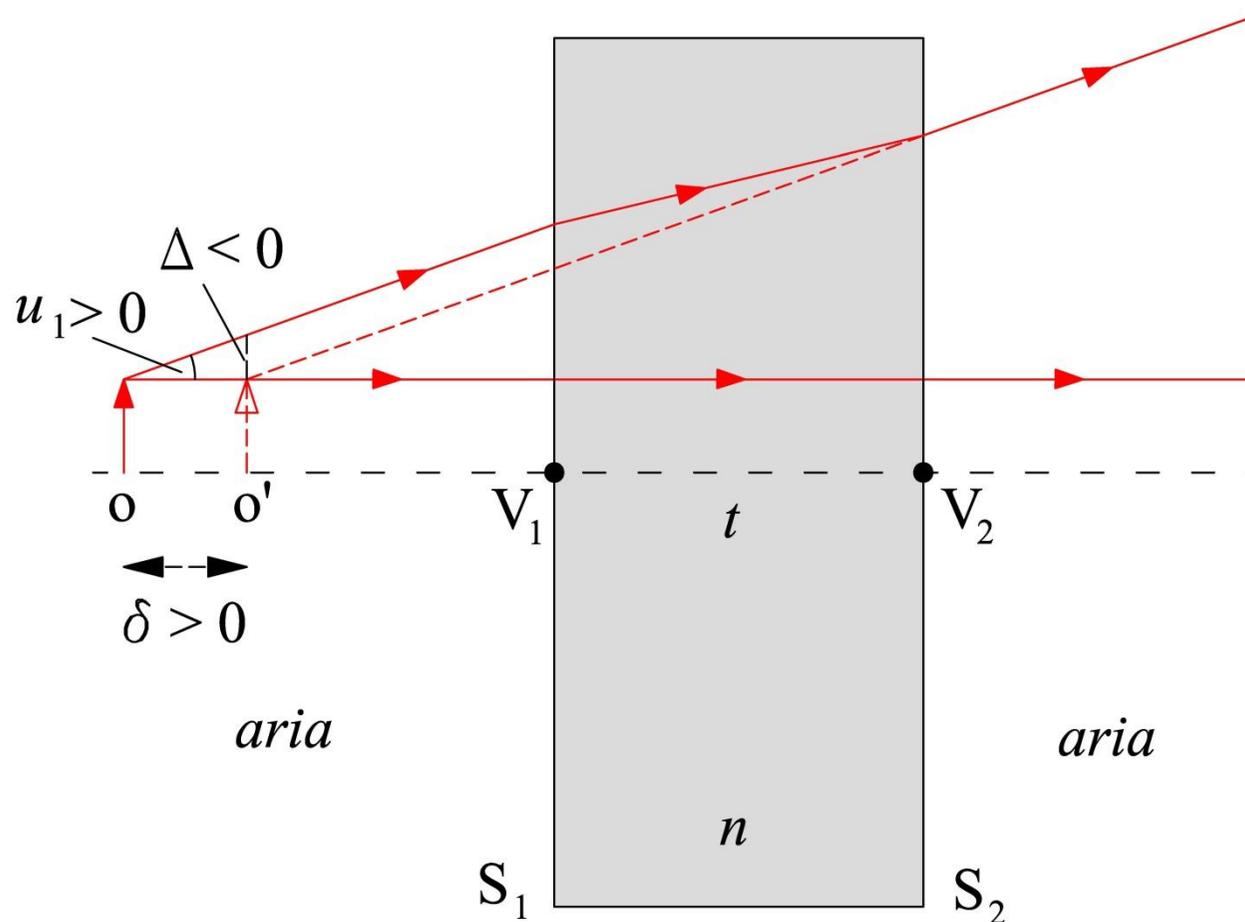
$$u'_2 = u_1$$

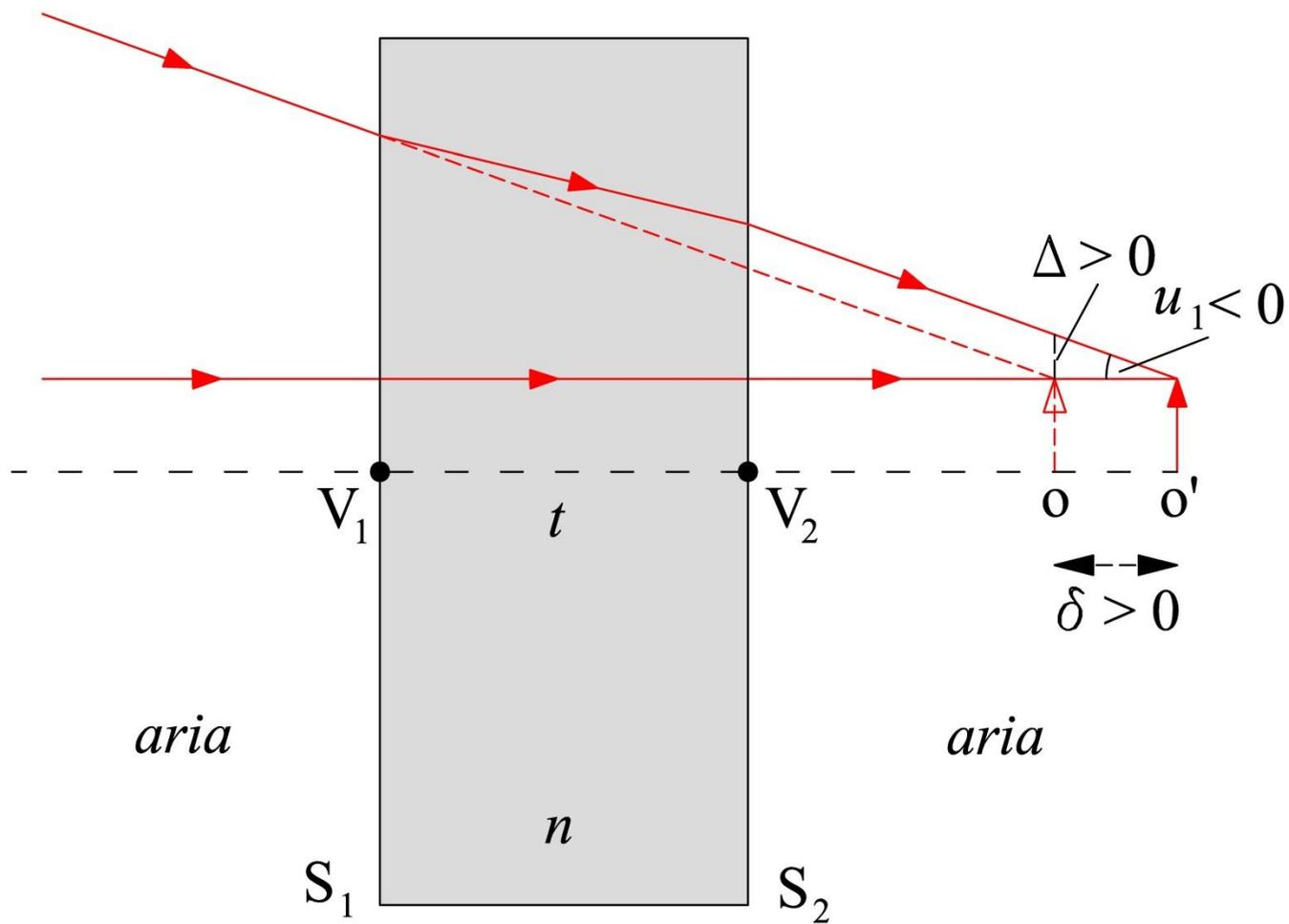
$$\Delta = y_2 - \tilde{y}_2 = - \frac{n-1}{n} t u_1$$

cioè quando un raggio incide su una lamina a facce piane e parallele, il raggio emergente dalla lamina è **parallelo** al raggio incidente ed è **traslato** rispetto a quest'ultimo di Δ .



I risultati adesso trovati ci permettono di determinare le proprietà di *imaging* di una lamina a facce piane e parallele che sono espresse nelle due seguenti figure.





In particolare si osserva che:

$$\delta = -\frac{\Delta}{u_1}$$

dove δ è positiva quando l'immagine si trova a destra dell'oggetto. Allora possiamo scrivere:

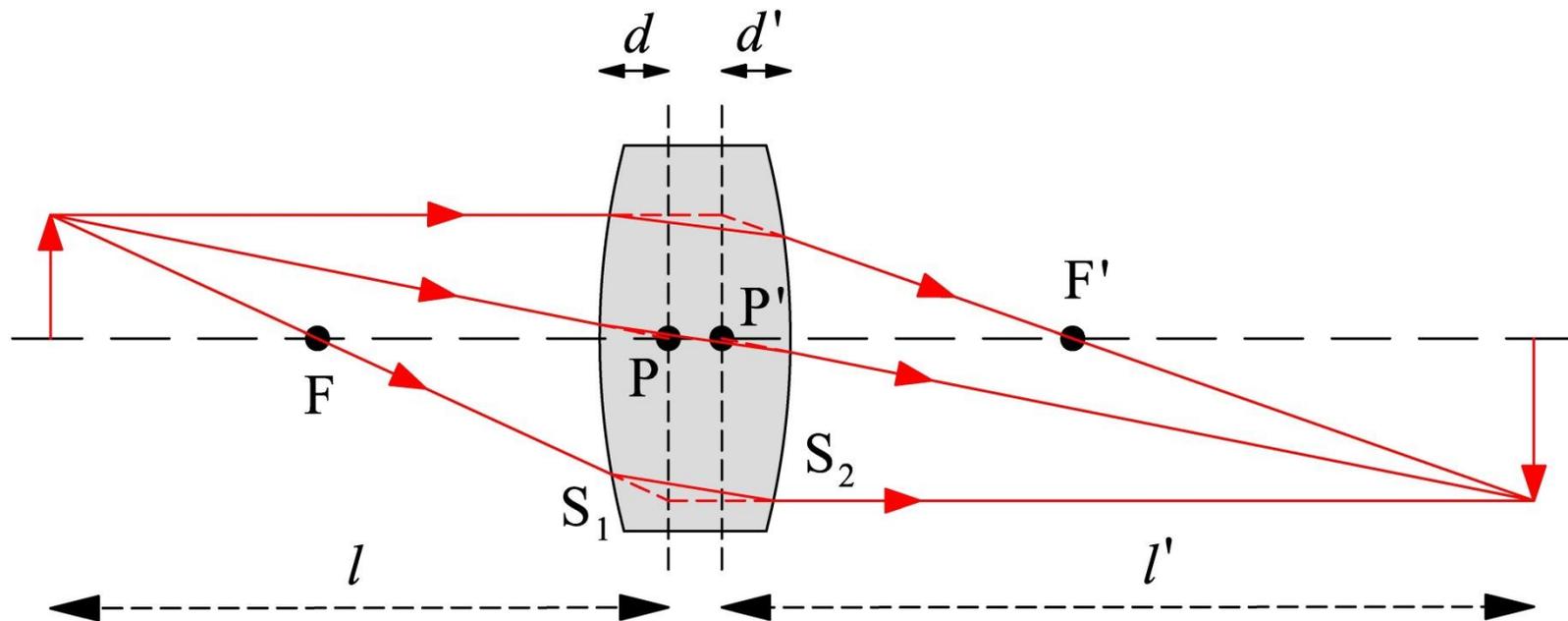
$$\delta = \frac{n-1}{n} t$$

$$m = 1$$

cioè l'immagine fatta da una lamina a facce piane e parallela ha la stessa dimensione ed orientazione dell'oggetto ed è situata sempre a destra di quest'ultimo, traslata della distanza δ che dipende solo dallo spessore della lamina e dall'indice di rifrazione del materiale di cui è fatta.

La lente sottile in aria

Riconsideriamo per un momento una lente spessa in aria. Indichiamo con n l'indice di rifrazione del mezzo di cui è fatta la lente alla lunghezza d'onda di interesse, con t il suo spessore al centro



Abbiamo visto che il potere Φ della lente è dato da:

$$\Phi_1 = (n - 1) c_1$$

$$\Phi_2 = (1 - n) c_2$$

$$\Phi = \frac{1}{f'} = \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_1 \cdot \Phi_2 \cdot \frac{t}{n}$$

dove Φ_1 e Φ_2 sono i poteri dei due diottri che costituiscono la lente e che la posizione dei piani principali è individuata dalle distanze d e d' :

$$d = ffl - f = \frac{\Phi_2}{\Phi} \cdot \frac{t}{n}$$

$$d' = bfl - f' = - \frac{\Phi_1}{\Phi} \cdot \frac{t}{n}$$

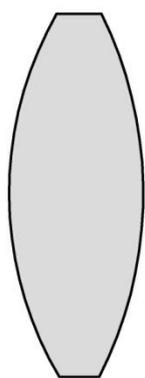
Quando lo spessore al centro t della lente è **sufficientemente piccolo** in modo che:

$$t, |d|, |d'| \ll |l|, |l'|$$

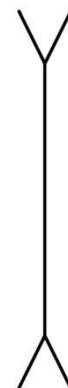
$$|\Phi_1 \cdot \Phi_2| \cdot \frac{t}{n} \ll |\Phi_1 + \Phi_2|$$

la lente è detta **lente sottile in aria**.

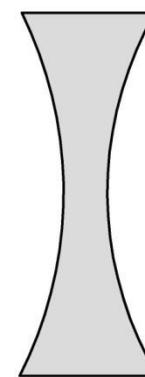
In figura sono mostrati i simboli con cui in Ottica Geometrica si indica una lente sottile. Le frecce presenti in questi simboli ricordano che una lente convergente è più spessa al centro che al bordo mentre, al contrario, una lente divergente è più spessa al bordo che al centro.



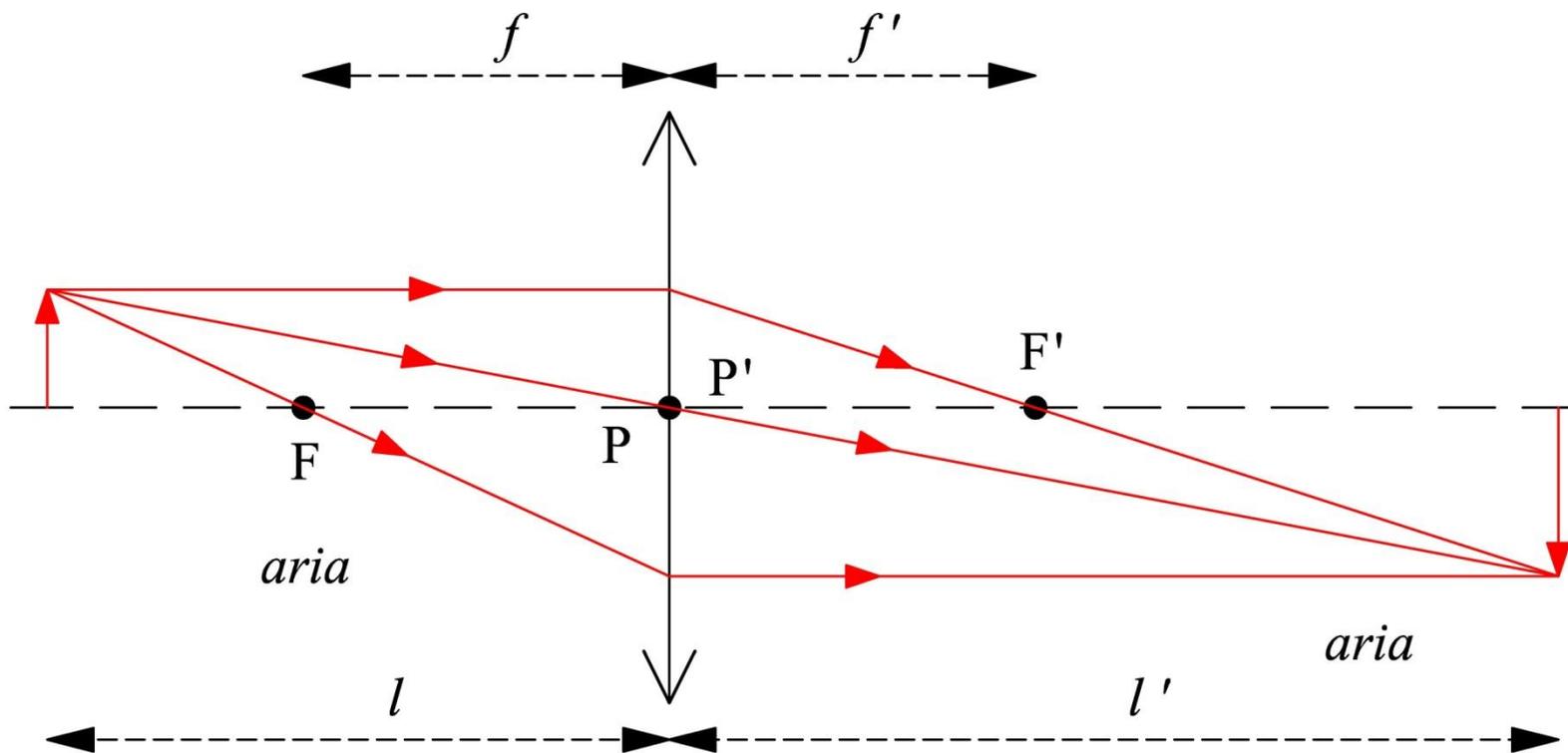
Lente convergente



Lente divergente



Inoltre, come è mostrato nella seguente figura, questi simboli ricordano che una lente sottile ai fini del tracciamento dei raggi coincide con i suoi piani principali che a loro volta coincidono tra di loro.

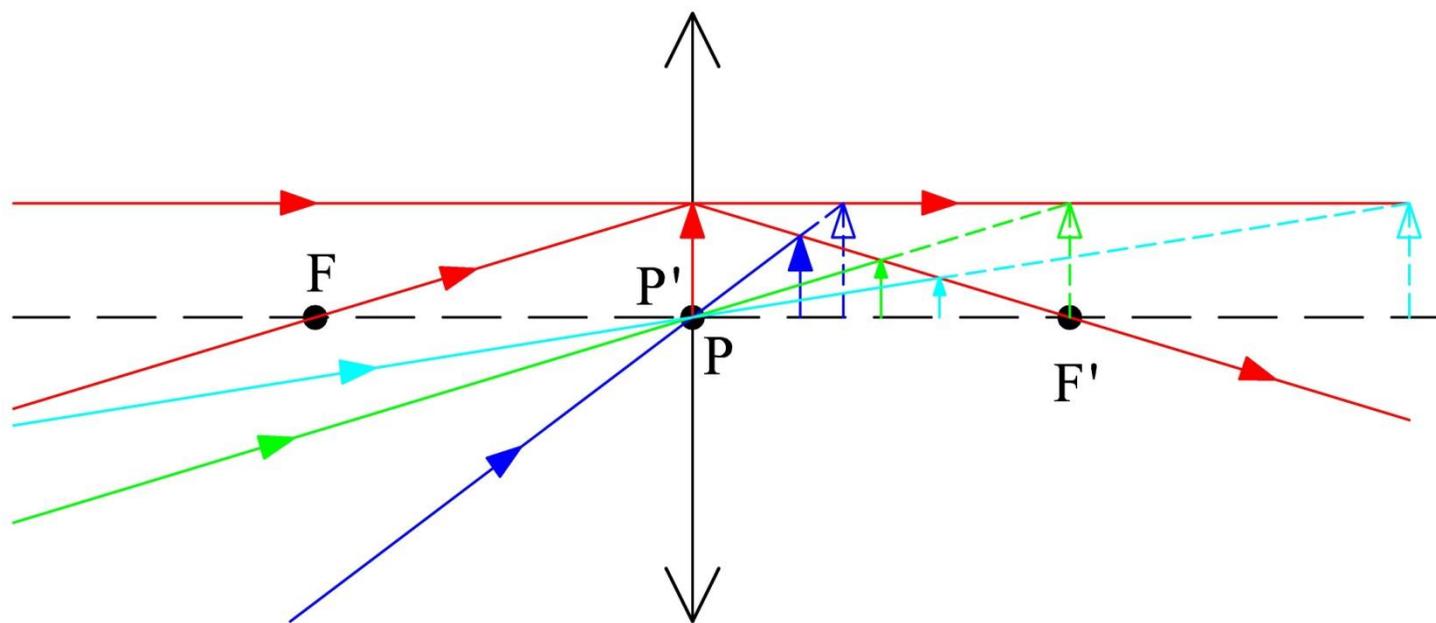
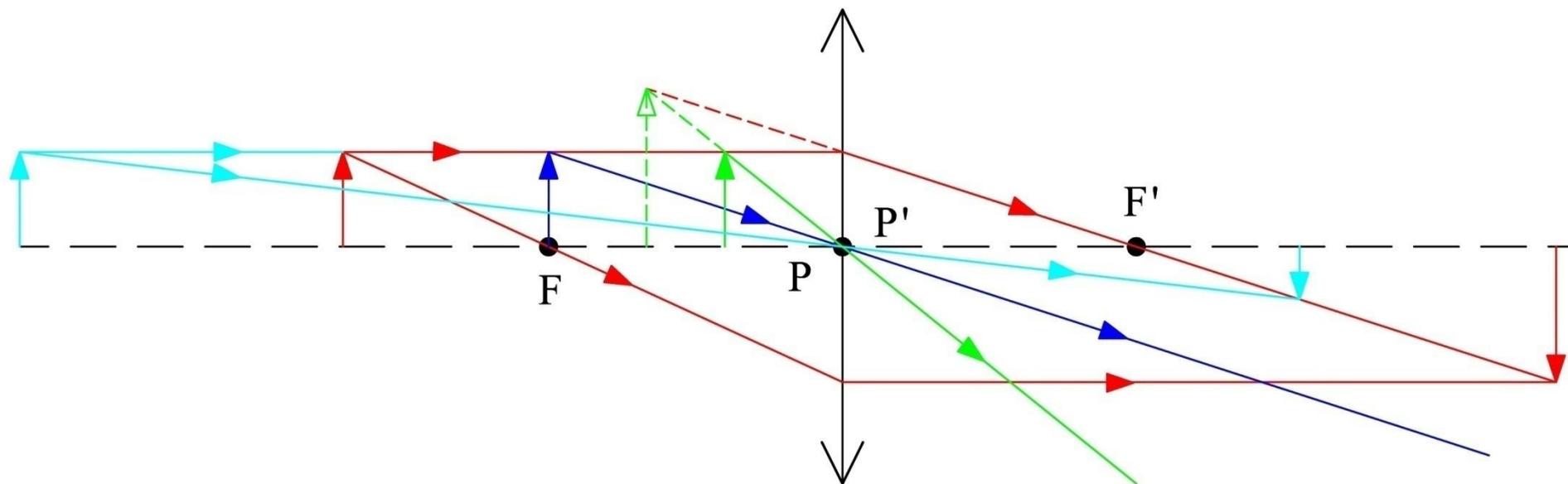


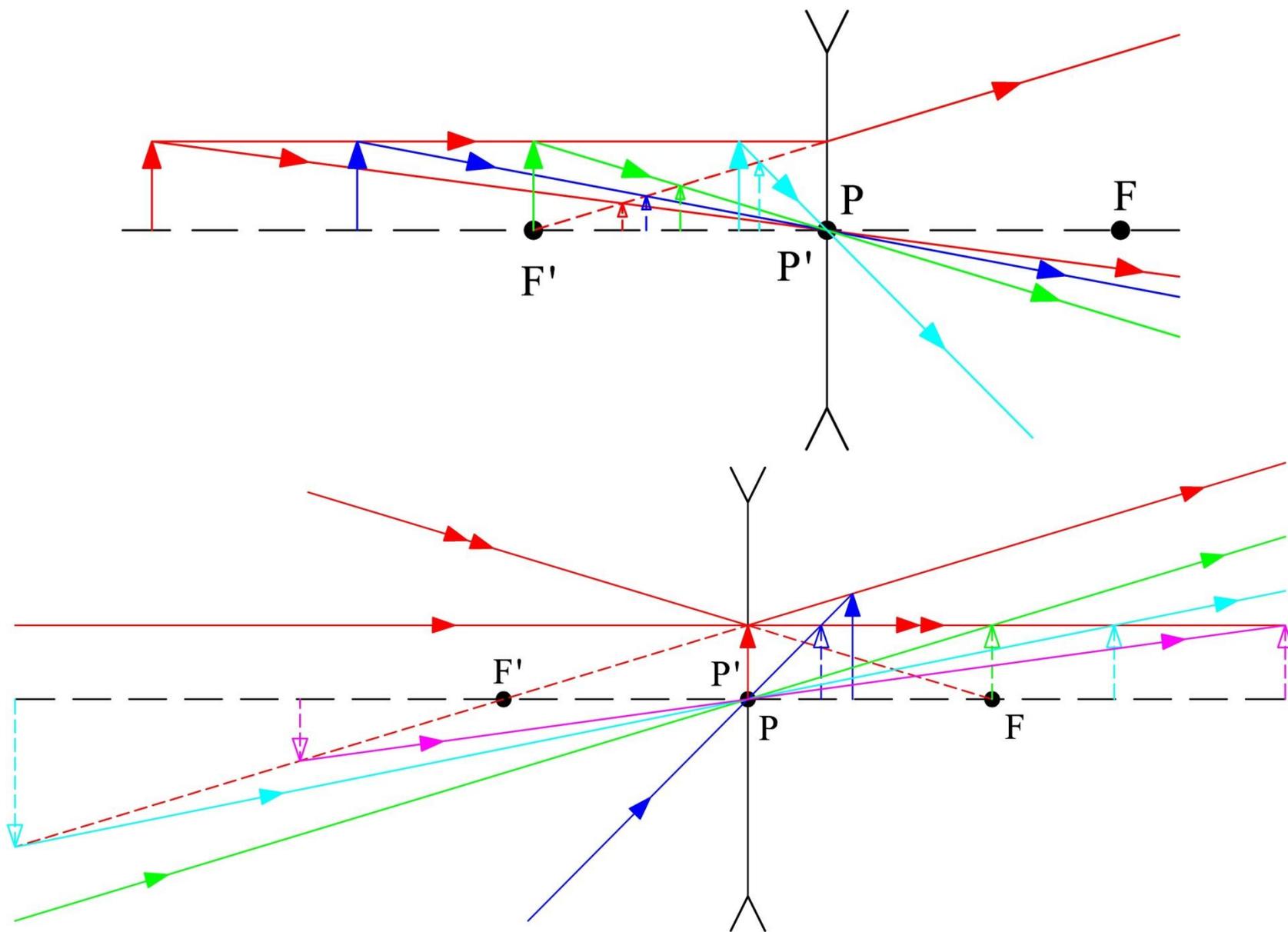
Per una lente sottile la formula che esprime il potere si semplifica nella seguente espressione:

$$\Phi = \frac{1}{f'} = \Phi_1 + \Phi_2 = (n - 1) (c_1 - c_2) = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

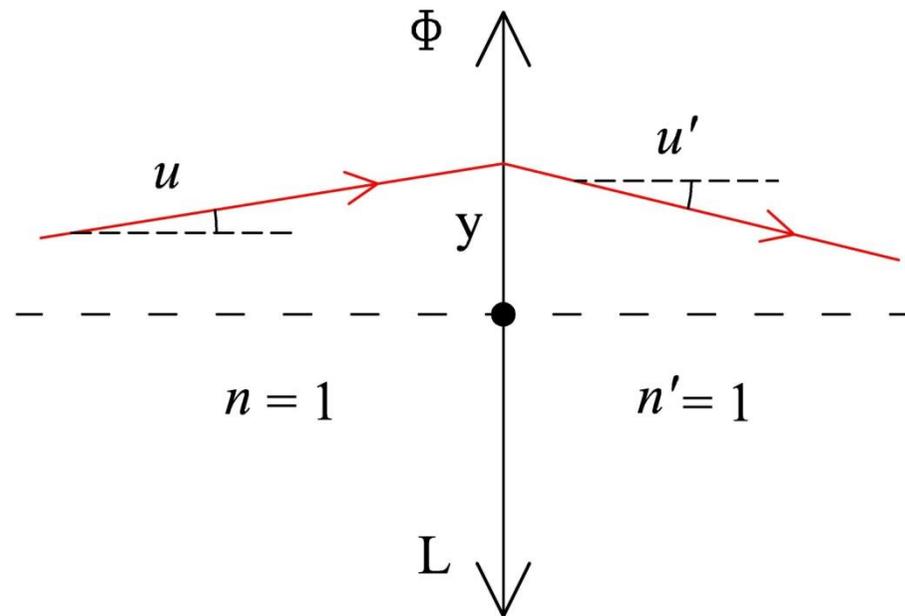
dove c_1, c_2 ed R_1, R_2 sono rispettivamente le curvature ed i raggi di curvatura dei due diottri che costituiscono la lente sottile.

Le proprietà di *imaging* di una lente sottile sono illustrate nelle figure riportate nel due pagine seguenti.





Consideriamo adesso il tracciamento di un generico raggio meridiano parassiale attraverso una lente sottile di potere Φ .



Come appare evidente dalla figura, a causa dello spessore trascurabile della lente, il raggio emergerà da quest'ultima ad una distanza y dall'asse ottico uguale alla distanza che compete al raggio quando incide sulla lente.

Inoltre, in questo caso, la relazione che lega u' ad u si semplifica notevolmente. Per dimostrare ciò riscriviamo prima le formule per il tracciamento di un generico raggio attraverso una lente spessa.

$$n u'_1 = u_1 - (n - 1) c_1 y_1$$

$$n u'_1 = u_1 - \Phi_1 y_1$$

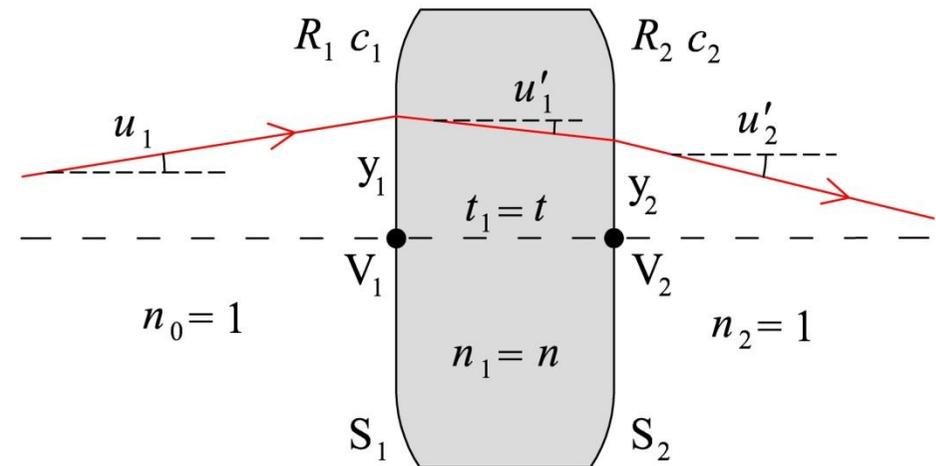
$$y_2 = y_1 + t u'_1$$

$$y_2 = y_1 + \frac{t}{n} (u_1 - \Phi_1 y_1)$$

$$u'_2 = n u'_1 - (1 - n) c_2 y_2$$

$$u'_2 = u_1 - \Phi_1 y_1 - \Phi_2 y_2$$

$$u'_2 = u_1 - (\Phi_1 + \Phi_2) y_1 - \frac{t}{n} \Phi_2 (u_1 - \Phi_1 y_1)$$



Riassumendo abbiamo trovato:

$$y_2 = y_1 + t u_1'$$

$$u_2' = u_1 - (\Phi_1 + \Phi_2) y_1 - \frac{t}{n} \Phi_2 (u_1 - \Phi_1 y_1)$$

che nell'ipotesi di lente sottile, cioè con t sufficientemente piccolo, si semplificano in:

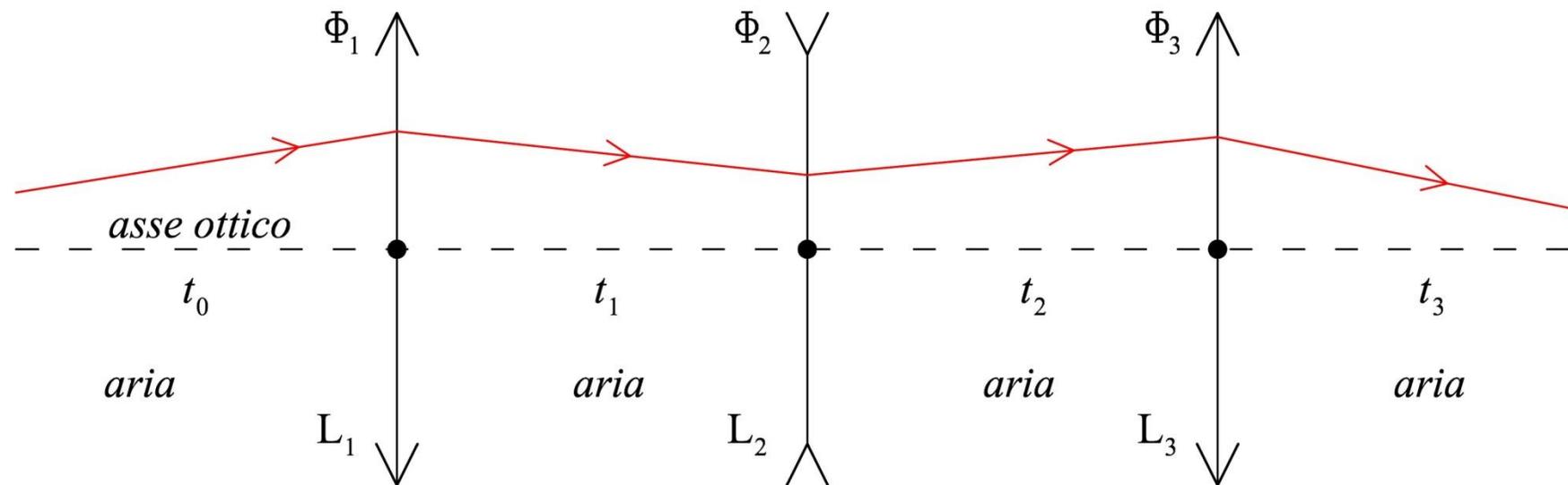
$$y_2 = y_1$$

$$u_2' = u_1 - (\Phi_1 + \Phi_2) y_1 = u_1 - \Phi y_1$$

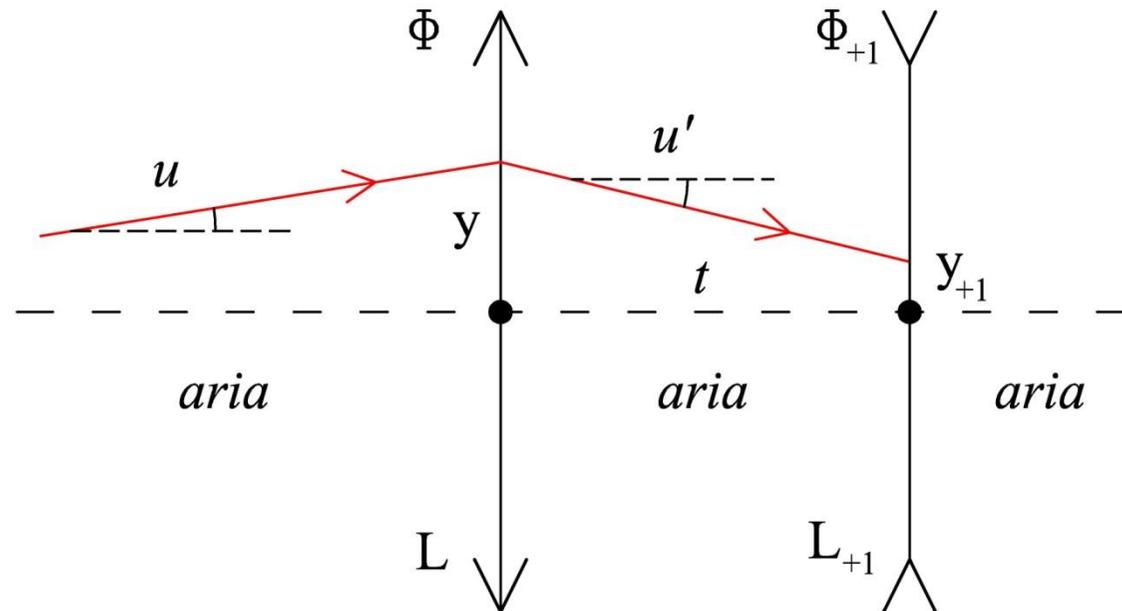
La prima equazione conferma il fatto che il raggio emerge dalla lente alla stessa distanza dall'asse ottico alla quale incide, mentre la seconda equazione riscritta con le notazione usate per una lente sottile diventa:

$$u' = u - \Phi y$$

Consideriamo adesso un generico sistema ottico centrato costituito da k lenti sottili poste in aria. Conoscere il sistema ottico in questo caso significa conoscere alla lunghezza d'onda di interesse il potere di ciascuna lente e la distanza assiale tra una lente e la successiva.



In figura è mostrata una generica lente L e la lente immediatamente successiva L_{+1} .

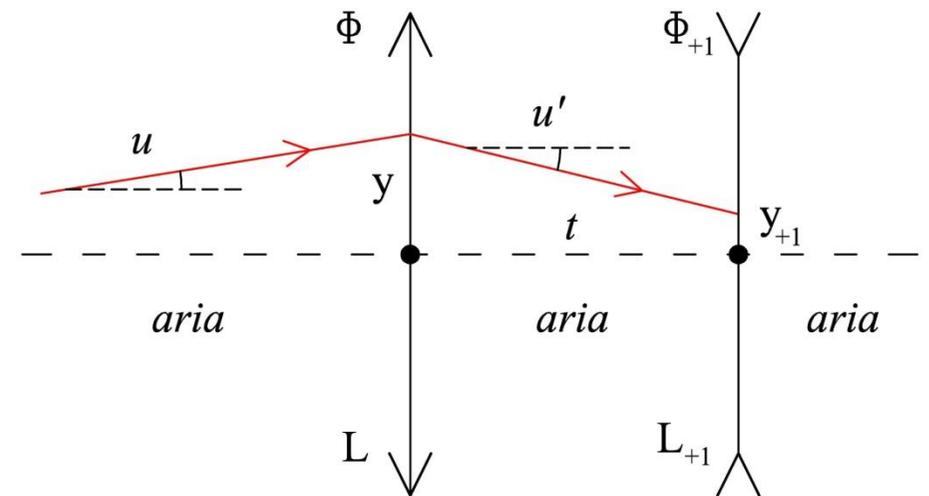


Tracciare un raggio attraverso un sistema ottico centrato costituito da lenti sottili in aria significa determinare su ciascuna lente sottile l'altezza y e l'angolo u mostrati in figura.

Tenendo conto di quanto detto poco sopra e le formule generali per il tracciamento di un raggio meridiano parassiale, attraverso un generico sistema ottico centrato, si deduce che il tracciamento di un raggio meridiano parassiale attraverso un sistema ottico centrato, costituito da lenti sottili poste in aria, è regolato dalle seguenti equazioni:

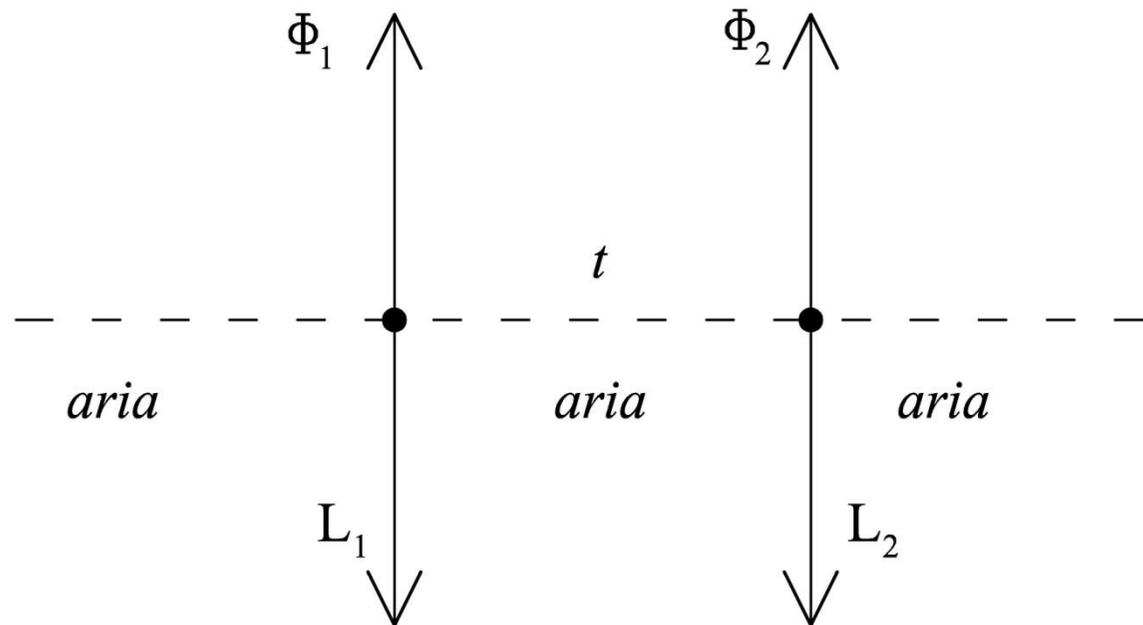
$$u' = u - \Phi y$$

$$y_{+1} = y + t u'$$



Due lenti sottili in aria

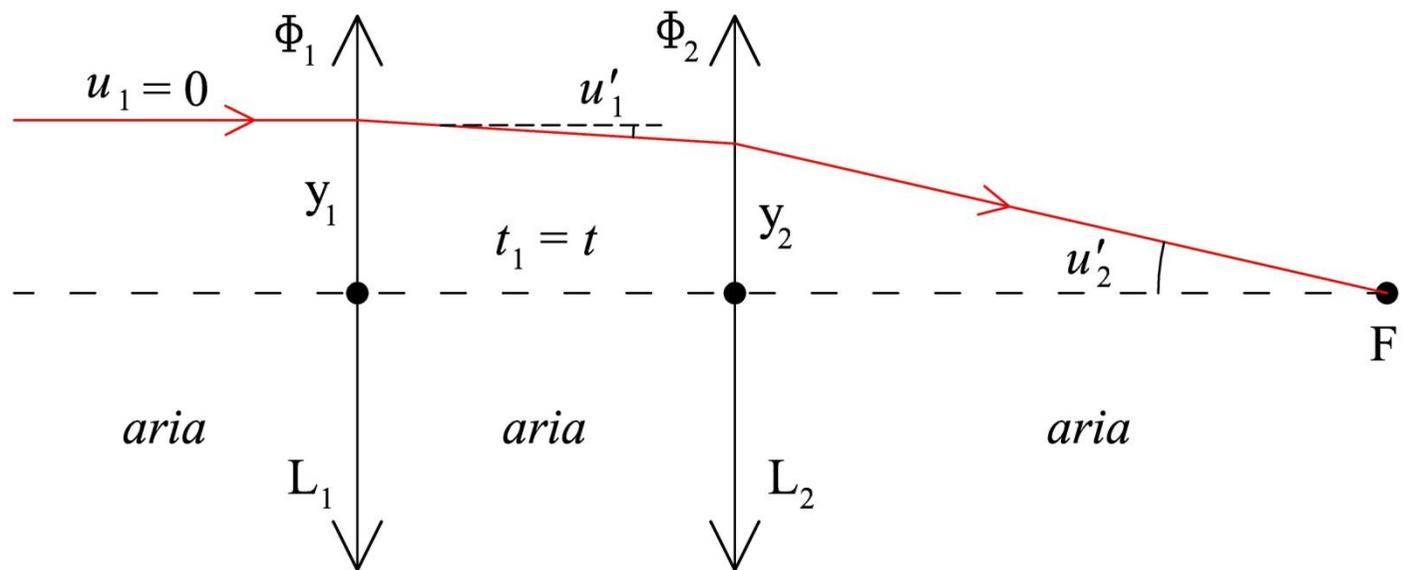
Consideriamo un sistema ottico centrato costituito da due lenti sottili in aria. Indichiamo con L_1 ed L_2 le due lenti, con Φ_1 e Φ_2 i corrispondenti poteri alla lunghezza d'onda di interesse e con t la distanza assiale tra di esse.



Per il calcolo delle due lunghezze focali effettive, che in questo caso coincidono avendo supposto il sistema ottico immerso in aria, e della lunghezza focale posteriore tracciamo un raggio meridiano parassiale parallelo all'asse ottico mediante le formule illustrate poco sopra.

$$u'_1 = u_1 - \Phi_1 y_1 = -\Phi_1 y_1 \qquad y_2 = y_1 + t u'_1 = (1 - t \Phi_1) y_1$$

$$u'_2 = u'_1 - \Phi_2 y_2 = -(\Phi_1 + \Phi_2 - t \Phi_1 \Phi_2) y_1$$



Allora il potere Φ del sistema ottico costituito da due lenti sottili in aria è dato da:

$$\Phi = \frac{1}{f'} = -\frac{u'_2}{y_1} = -\frac{-(\Phi_1 + \Phi_2 - t \Phi_1 \Phi_2) y_1}{y_1}$$

e quindi

$$\Phi = \frac{1}{f'} = \Phi_1 + \Phi_2 - t \Phi_1 \Phi_2$$

Inoltre la lunghezza focale posteriore bfl è data da:

$$bfl = -\frac{y_2}{u'_2} = -\frac{(1 - t \Phi_1) y_1}{-(\Phi_1 + \Phi_2 - t \Phi_1 \Phi_2) y_1}$$

e quindi:

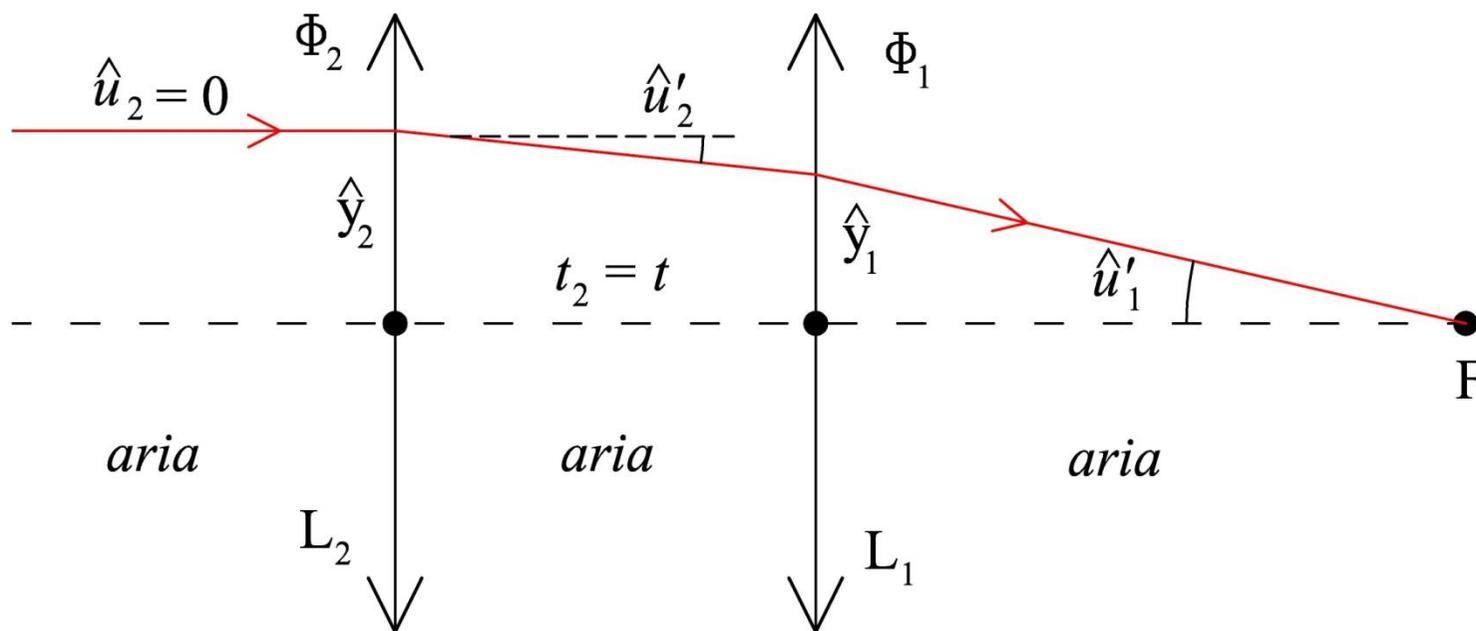
$$bfl = \frac{1 - t \Phi_1}{\Phi}$$

Per il calcolo della lunghezza focale anteriore bfl tracciamo un raggio meridiano parassiale parallelo all'asse ottico attraverso il sistema ottico invertito. Particolare attenzione deve essere rivolta in questo caso al segno dei poteri delle due lenti sottili. Infatti, osservando la formula che permette di calcolare il potere di una lente sottile è facile concludere che, invertendo il sistema ottico centrato, costituito dalle due lenti sottili, i raggi di curvatura dei diottri, costituenti le lenti, cambiano segno, mentre i poteri di ciascuna lente rimane inalterato.

Eseguendo il tracciamento sopra menzionato si ottiene:

$$\hat{u}'_2 = \hat{u}_2 - \Phi_2 \hat{y}_2 = -\Phi_2 \hat{y}_2 \qquad \hat{y}_1 = \hat{y}_2 + t \hat{u}'_2 = (1 - t \Phi_2) \hat{y}_2$$

$$\hat{u}'_1 = \hat{u}'_2 - \Phi_1 \hat{y}_1 = -(\Phi_1 + \Phi_2 - t \Phi_1 \Phi_2) \hat{y}_2$$



La lunghezza focale anteriore ffl del sistema ottico costituito da due lenti sottili in aria è allora data da:

$$ffl = -\widehat{ffl} = - \left(- \frac{\widehat{y}_1}{\widehat{u}'_1} \right) = \frac{(1 - t \Phi_2) \widehat{y}_2}{-(\Phi_1 + \Phi_2 - t \Phi_1 \Phi_2) \widehat{y}_2}$$

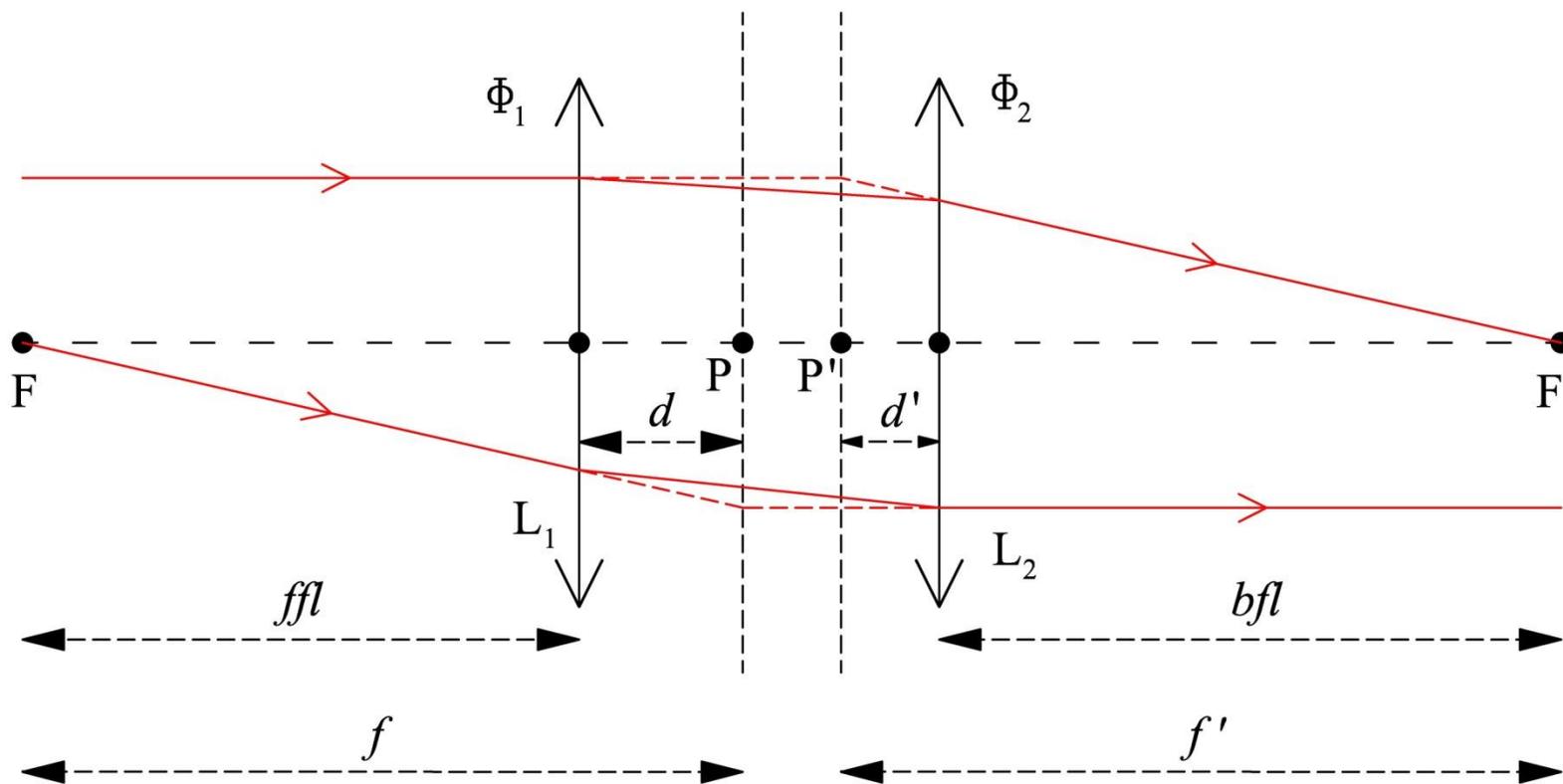
e quindi:

$$ffl = - \frac{(1 - t \Phi_2)}{\Phi}$$

Per l'individuazione della posizione del primo punto principale P rispetto alla prima lente e del secondo punto principale P' rispetto alla seconda lente, è conveniente, come nel caso di una lente spessa, introdurre le distanze d e d' definite dalle seguenti relazioni:

$$d = ffl - f$$

$$d' = bfl - f'$$



P' è a sinistra di L_2 quando $d' < 0$, e analogamente P è a destra di L_1 quando $d > 0$.

Utilizzando i risultati sopra riportati è facile mostrare che:

$$d = ffl - f = ffl + f' = - \frac{(1 - t \Phi_2)}{\Phi} + \frac{1}{\Phi}$$

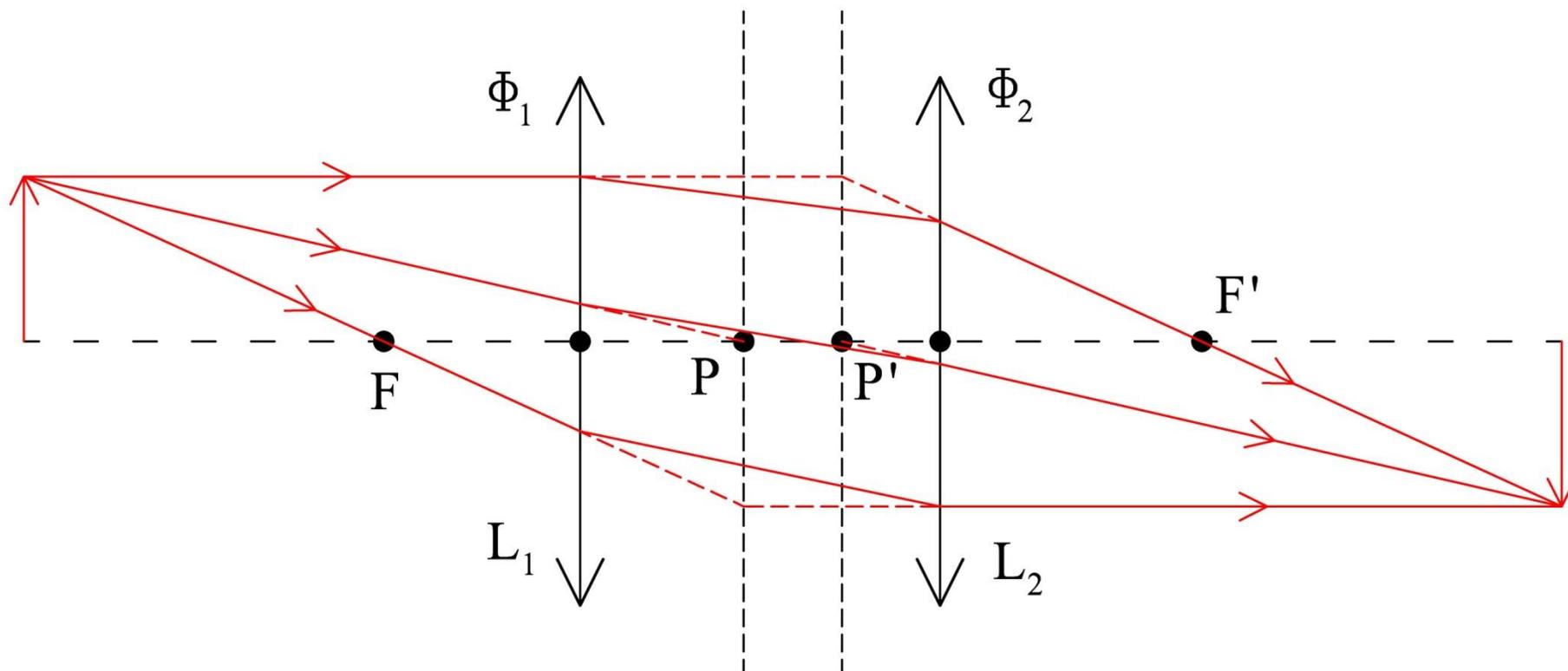
$$d' = bfl - f' = \frac{1 - t \Phi_1}{\Phi} - \frac{1}{\Phi}$$

e quindi:

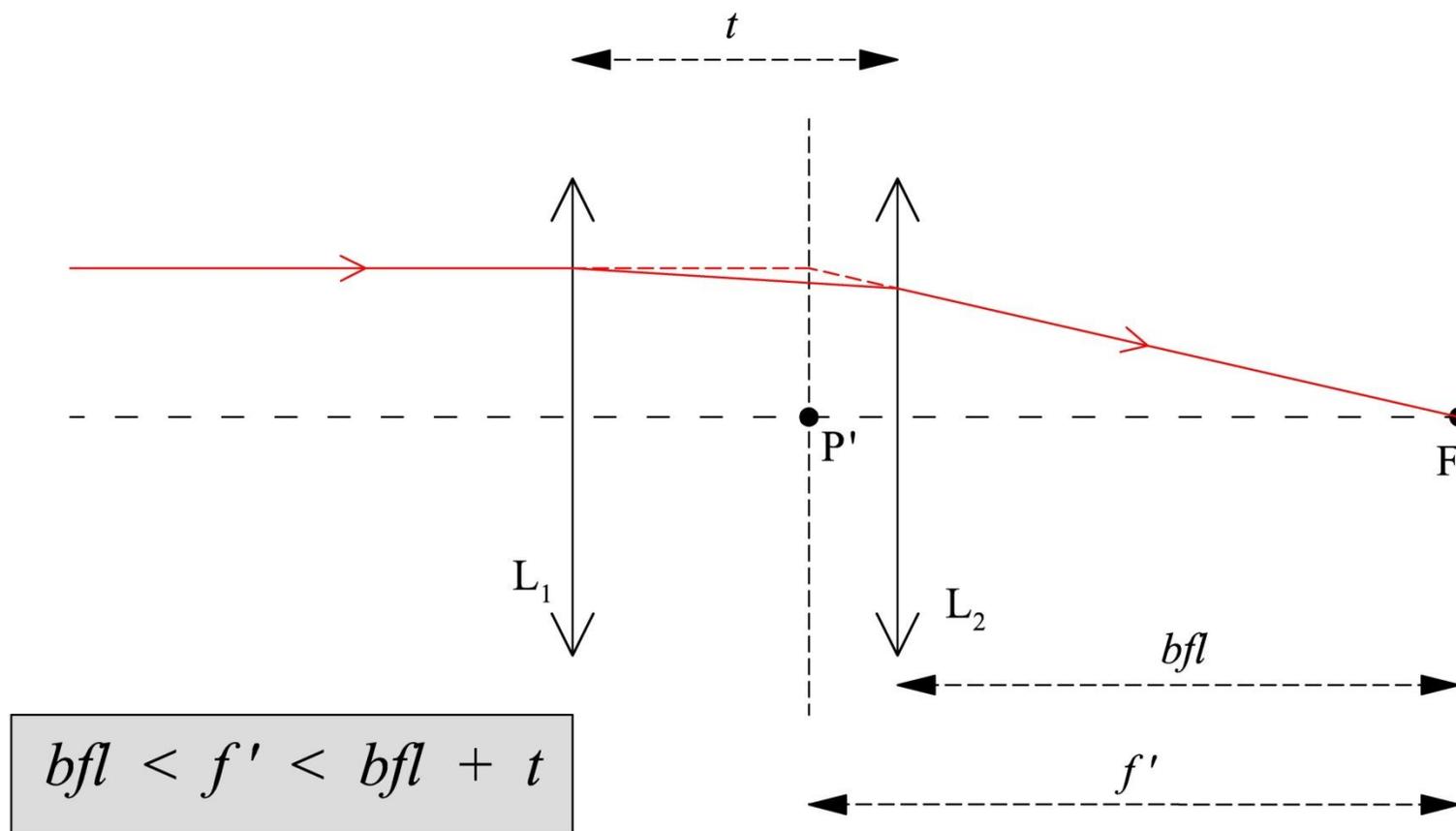
$$d = ffl - f = \frac{\Phi_2}{\Phi} t$$

$$d' = bfl - f' = - \frac{\Phi_1}{\Phi} t$$

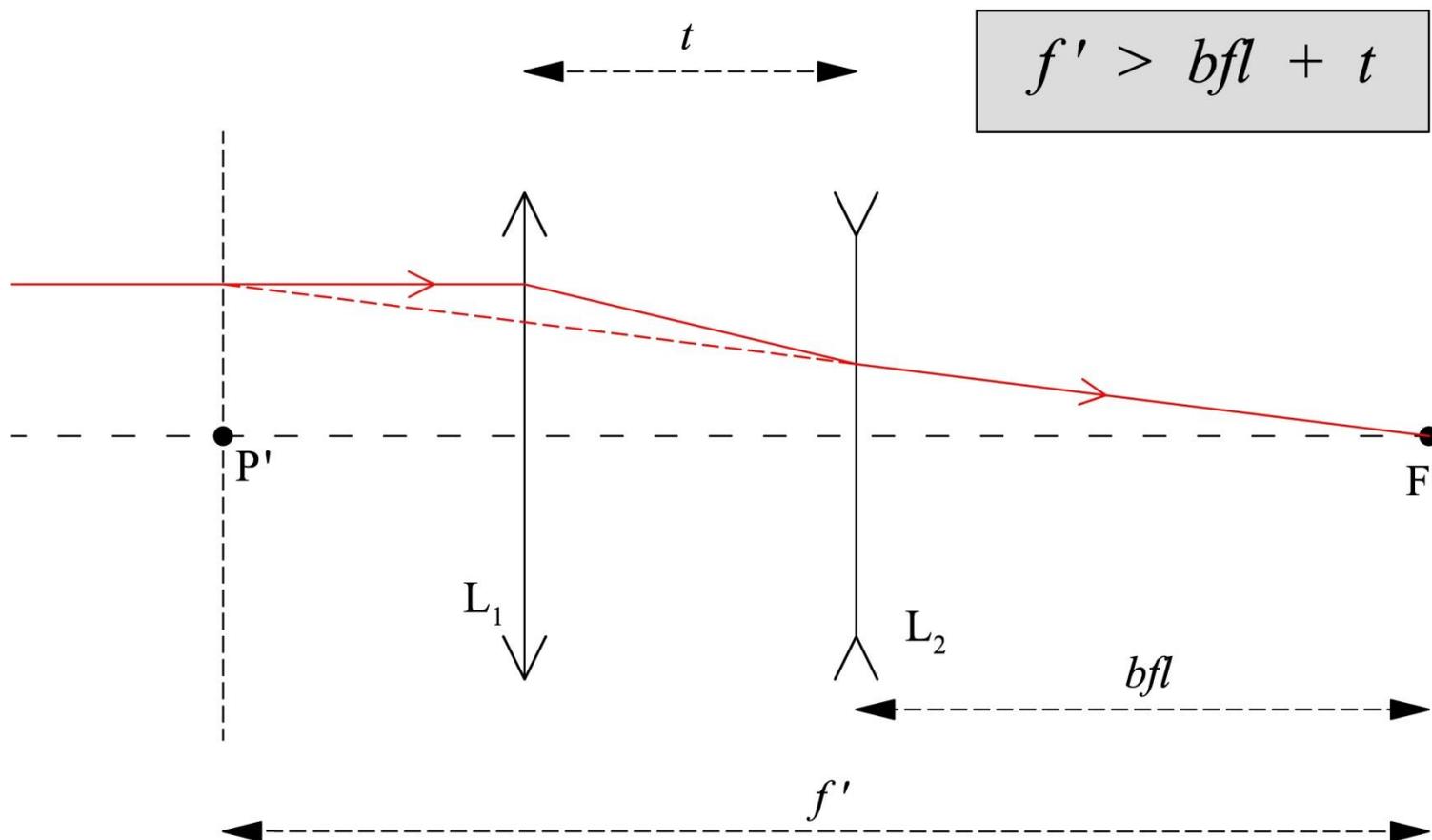
Infine nella seguente figura è mostrato un esempio di formazione di una immagine nel caso in cui il sistema ottico sia costituito da due lenti sottili positive in aria.



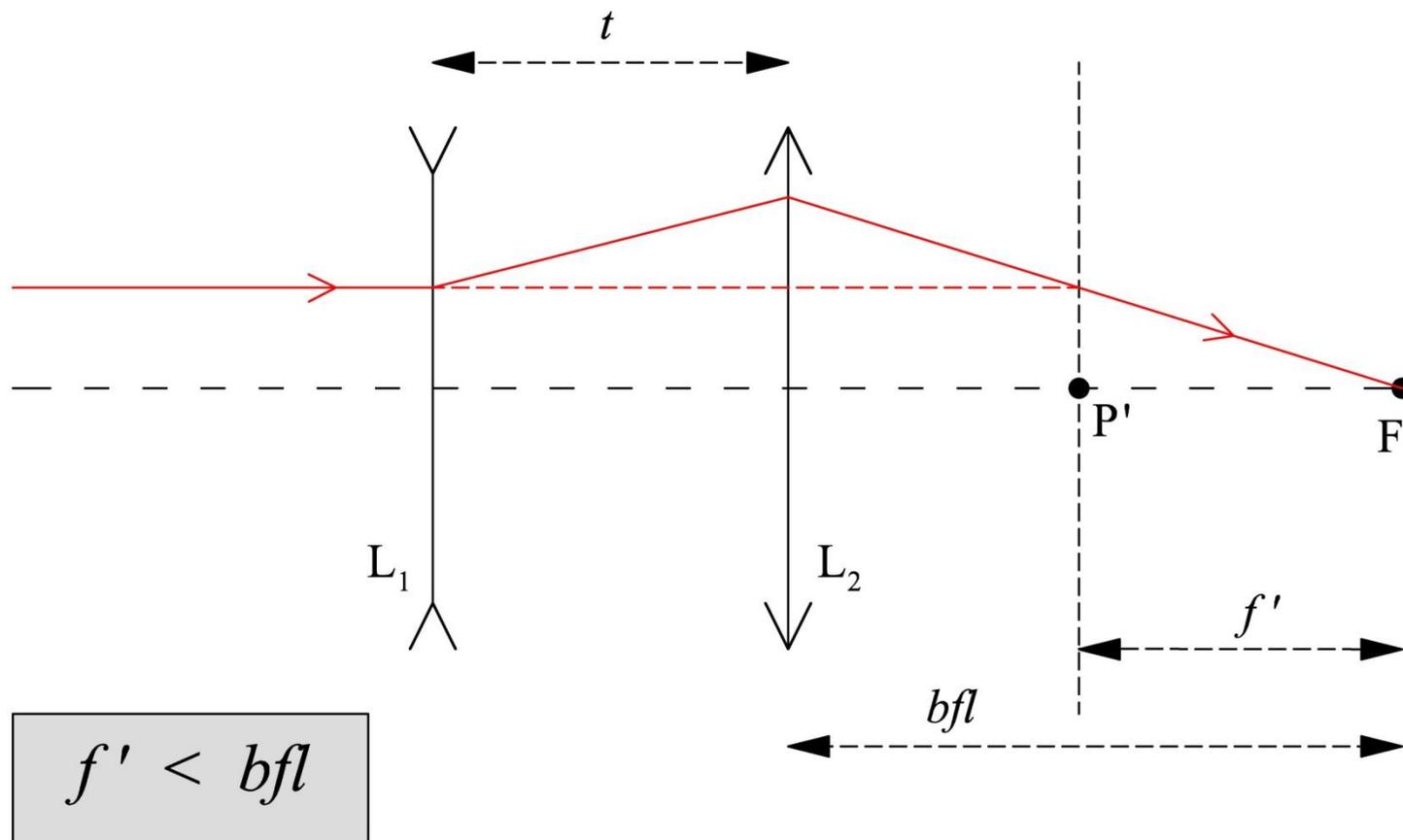
Un sistema **convergente** composto da due lenti sottili, L_1 e L_2 **positive**, si dice in **configurazione di Petzval** quando il secondo piano principale è localizzato tra le due lenti.



Un sistema **convergente** composto da due lenti sottili, L_1 **positiva** ed L_2 **negativa**, si dice in **configurazione telefoto** quando il secondo piano principale si trova a sinistra di L_1 .

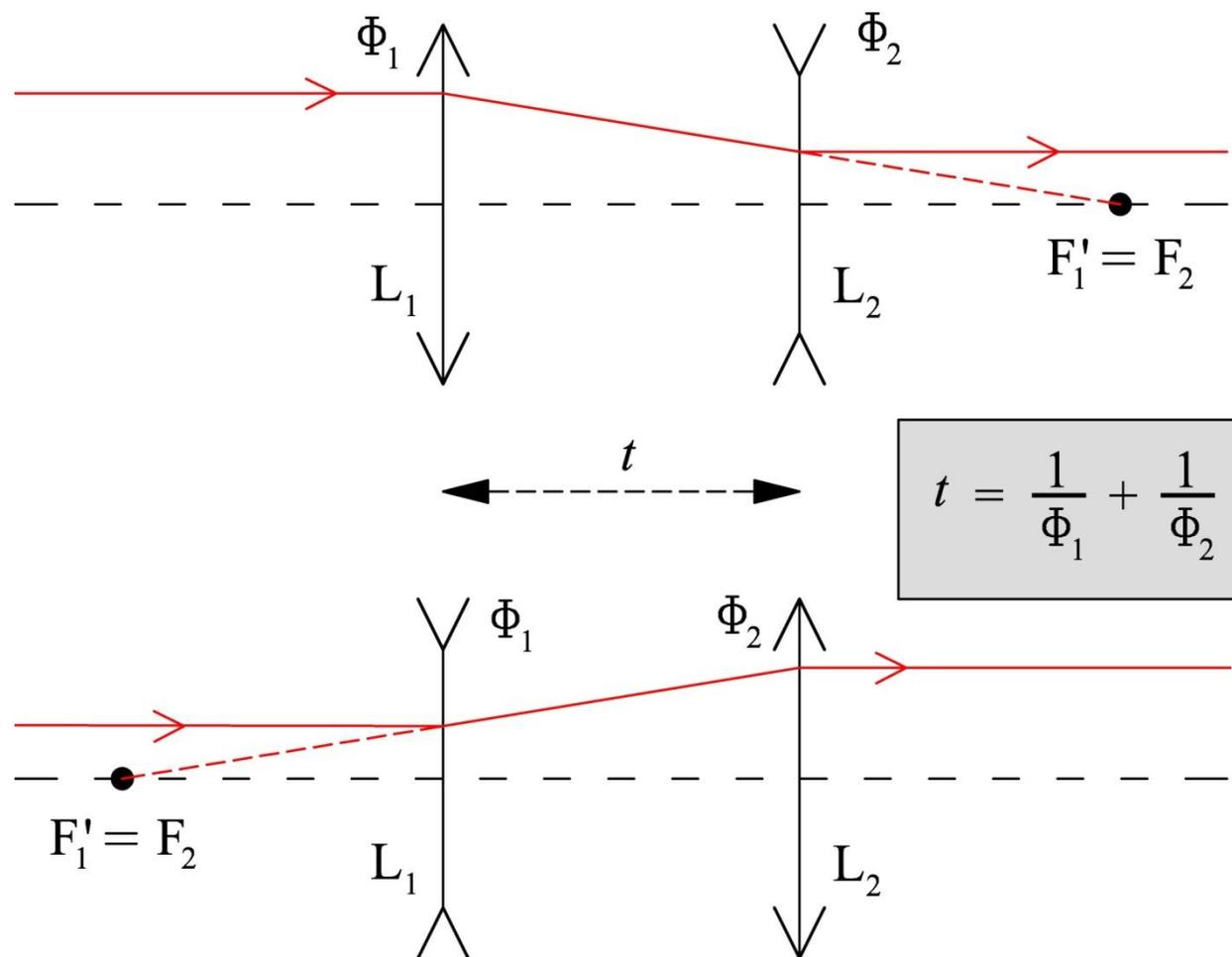


Un sistema **convergente** composto da due lenti sottili, L_1 **negativa** ed L_2 **positiva**, si dice in **configurazione retrofuoco** quando il secondo piano principale si trova a destra di L_2 .

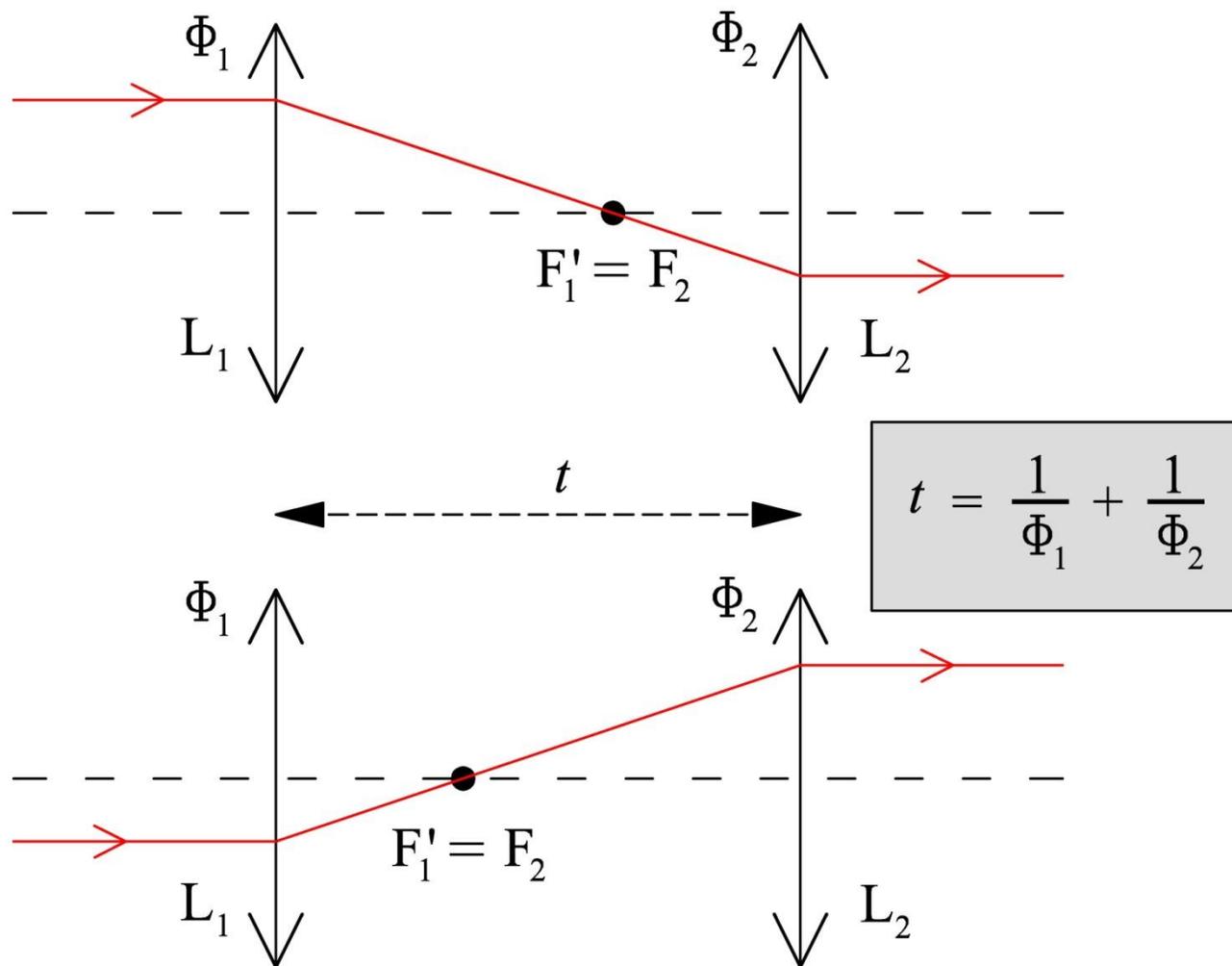


Un sistema composto da due lenti sottili, L_1 ed L_2 , risulta **afocale**, quando la distanza tra le due lenti è tale che il secondo punto focale di L_1 **coincide** con il primo punto focale di L_2 .

Quando una delle due lenti è **positiva** e l'altra è **negativa**, il sistema ottico afocale da esse costituito si dice in **configurazione galileiana**.

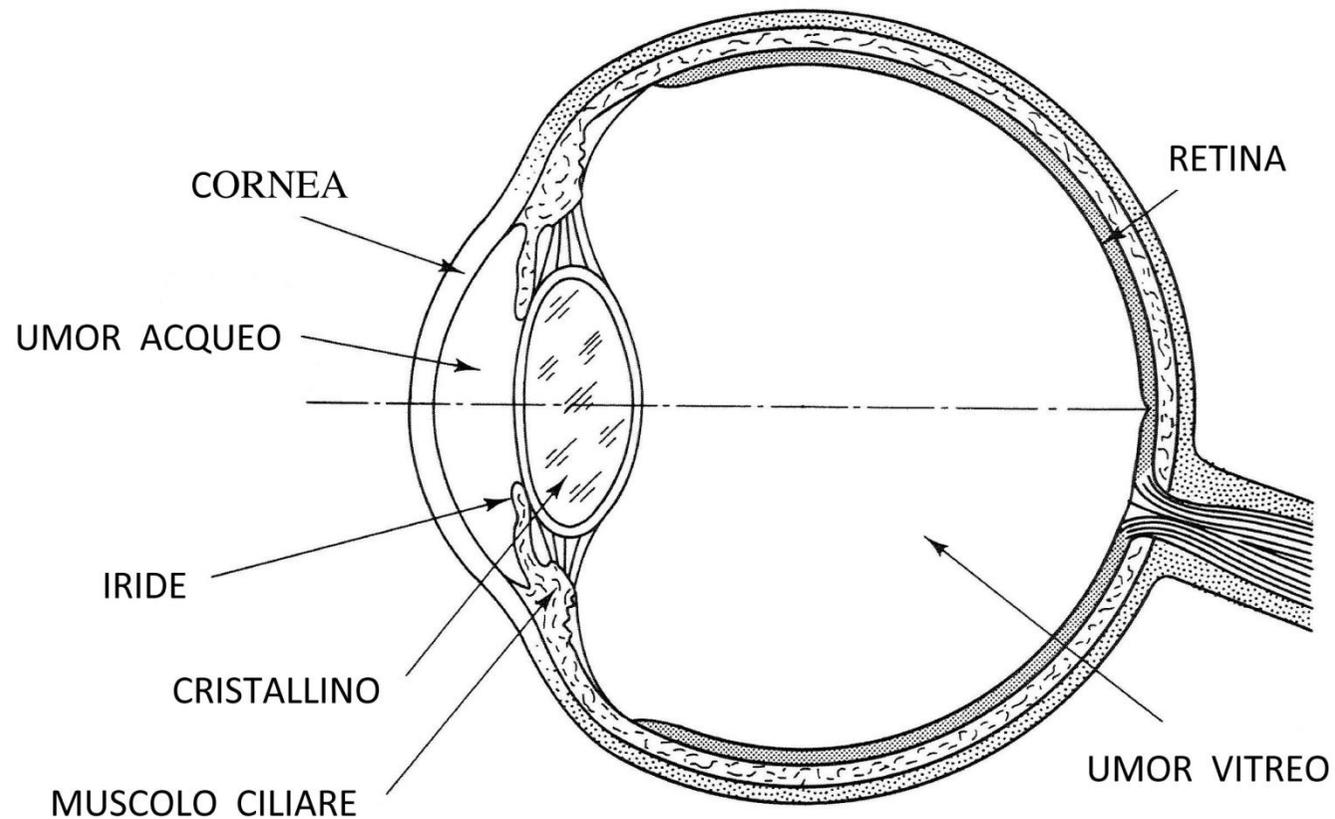


Quando le due lenti sono entrambi **positive**, il sistema ottico afocale da esse costituito si dice in **configurazione kepleriana**.



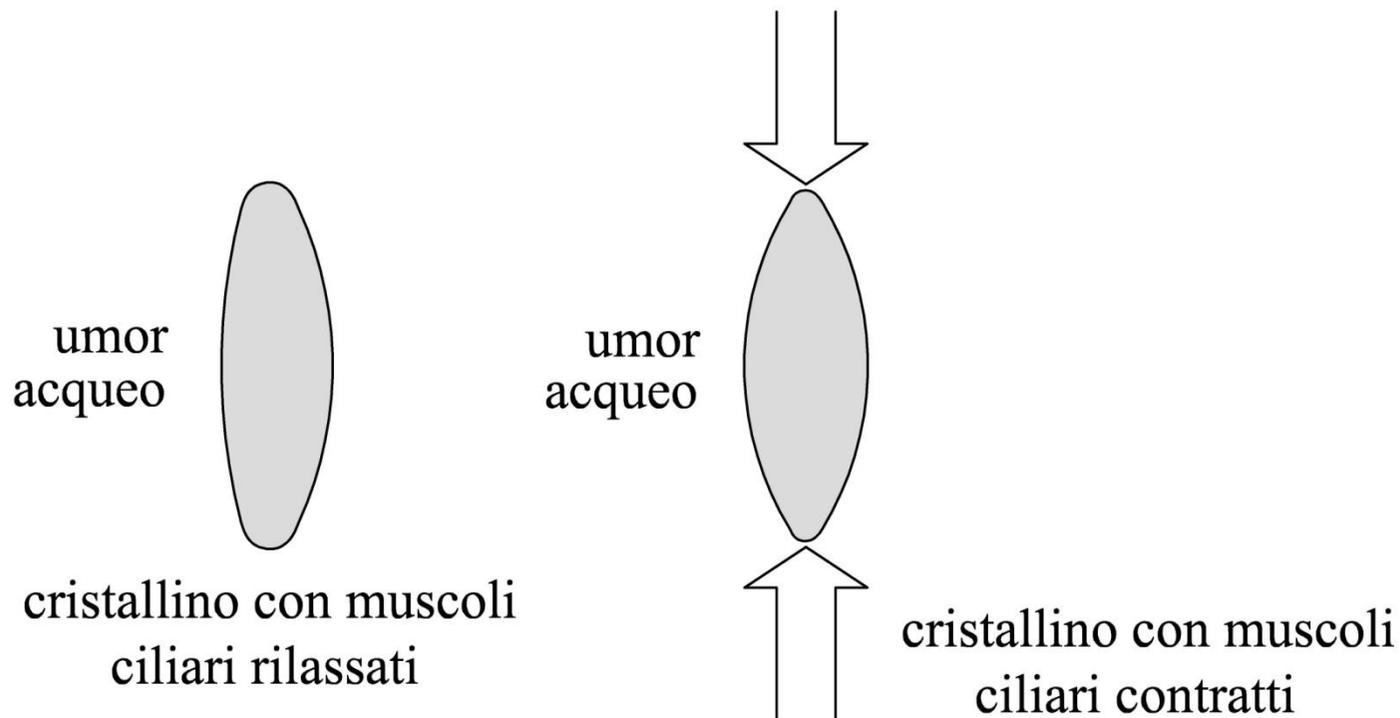
L'occhio schematico n. 2 di Gullstrand

Concludiamo questo capitolo determinando le caratteristiche parassiali dell'occhio umano.

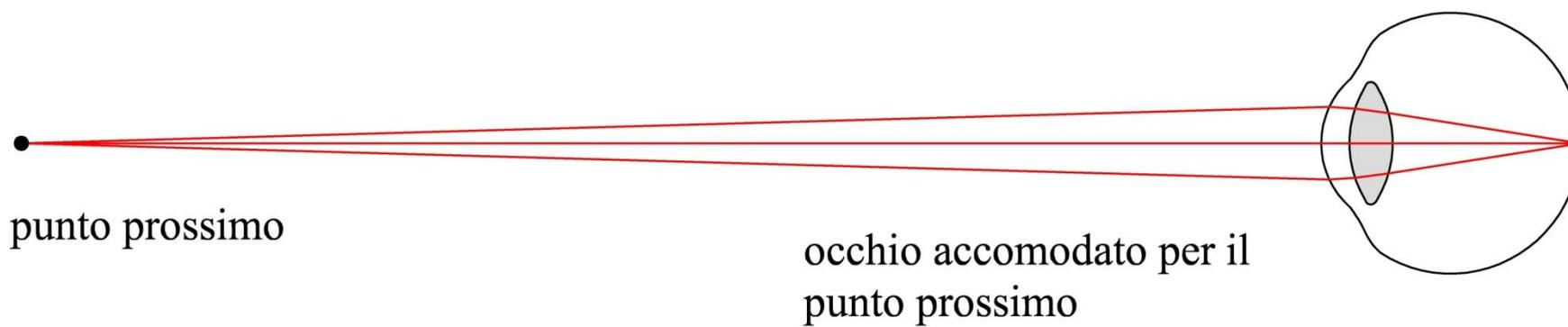
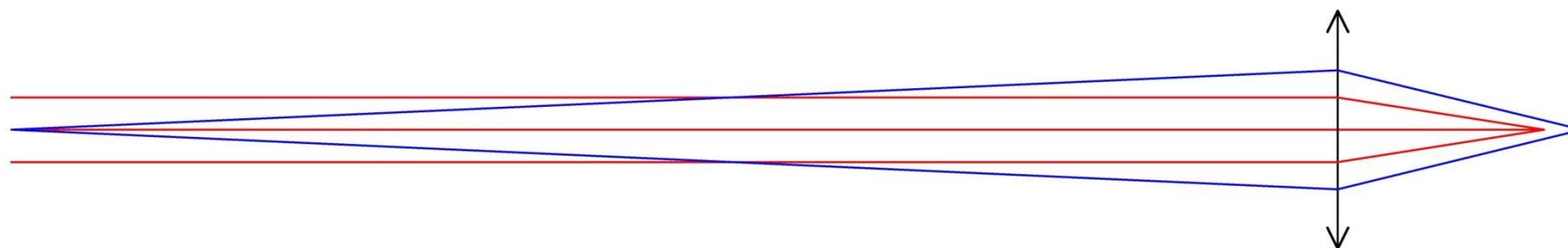
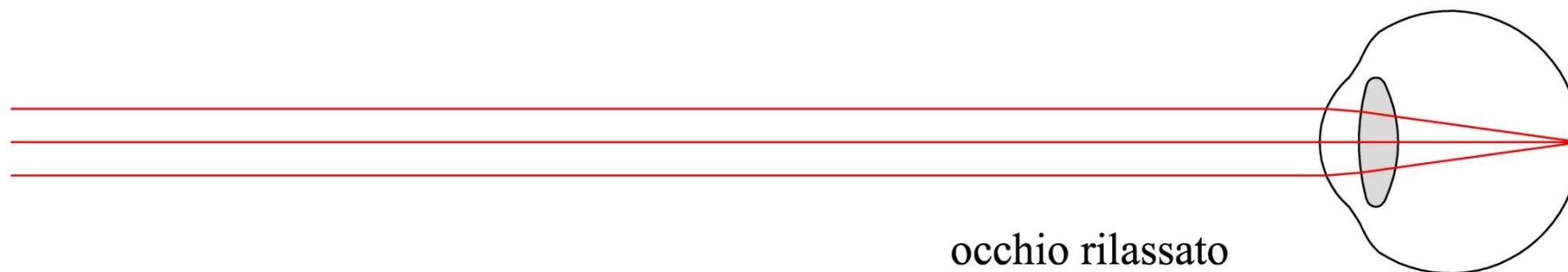


Dal punto di vista dell'Ottica Geometrica l'occhio è costituito, come è indicato nella precedente figura, dalla **cornea**, dall'**iride**, dal **cristallino** e dalla **retina**. La cornea ed il cristallino delimitano la **camera anteriore** dell'occhio dove è presente l'**umor acqueo**, mentre il cristallino e la retina delimitano la camera posteriore dove è presente l'**umor vitreo**. L'aggettivo vitreo evidenzia il fatto che il liquido che riempie la camera posteriore dell'occhio è gelatinoso al contrario di quello che riempie la camera anteriore che è simile all'acqua. Dal punto di vista ottico, però, i due umori sono invece molto simili e le loro proprietà ottiche si discostano molto poco da quelle dell'acqua pura. L'iride, posta subito prima del cristallino, è un diaframma con un foro circolare che costituisce lo stop dell'occhio. La sua principale caratteristica è quella di poter variare, praticamente in tempo reale, il diametro dello stop in funzione del quantitativo di luce che entra nell'occhio. Il diametro della pupilla d'ingresso può variare da un minimo

di 2 mm ad un massimo di 8 mm. I **muscoli ciliari**, collegati al cristallino, quando si contraggono comprimono quest'ultimo lungo il corpo cilindro facendolo spanciare. Tale effetto produce una diminuzione dei raggi di curvatura delle due superfici esterne ed un aumento dello spessore al centro e di conseguenza un aumento del potere. Il cristallino è quindi una lente di potere variabile.



L'occhio umano, non affetto da patologie, è stato “disegnato” in modo che quando i muscoli ciliari non sono contratti (**occhio rilassato**) la retina coincide con il secondo piano focale dell'occhio, ovvero l'occhio rilassato forma l'immagine di un paesaggio a distanza infinita sulla retina. È esperienza comune che avvicinando un oggetto, da distanza infinita, verso l'occhio, questo si vede perfettamente nitido fino ad un certo punto, detto **punto prossimo**, al di là del quale la visione risulta sfuocata. La distanza occhio – punto prossimo varia con l'età: da 7 cm per un giovanissimo a 30 cm per un uomo di mezza età, fino ad arrivare a 1 m per un anziano. Pensando alle proprietà di imaging di una lente positiva, è facile comprendere questo comportamento dell'occhio. Infatti, abbiamo visto che quando un oggetto reale, posto all'infinito, si avvicina verso una lente positiva la sua corrispondente immagine si allontana dal fuoco allontanandosi dalla lente. Nel caso dell'occhio rilassato questo vuol dire che

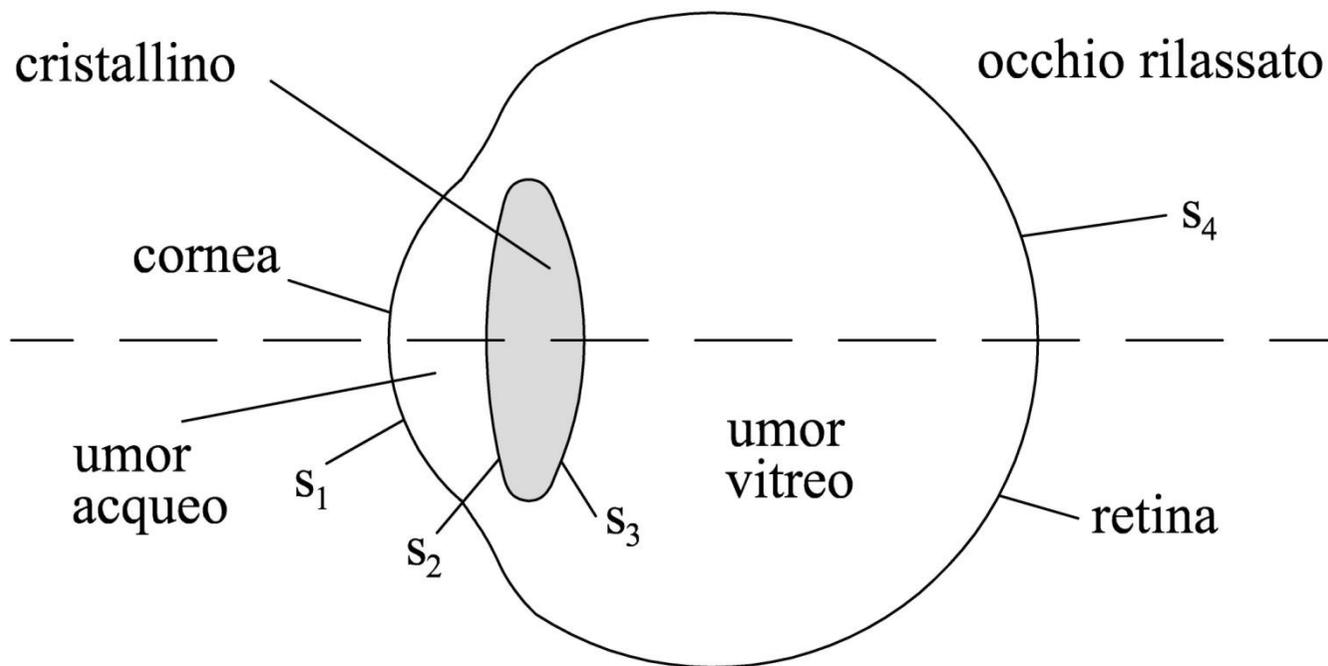


l'immagine di un oggetto a distanza finita cadrebbe oltre la retina risultando quindi sfuocato su quest'ultima. La perfetta visione di oggetti, più lontani dall'occhio del punto prossimo, è allora garantita dal processo di **accomodamento dell'occhio**: i muscoli ciliari, praticamente in tempo reale, modificano il potere del cristallino a seconda della distanza dell'oggetto in modo da formarne l'immagine esattamente sulla retina. In questa prospettiva è facile comprendere anche l'esistenza del punto prossimo ed il motivo per cui esso si allontana dall'occhio a causa dell'invecchiamento. Infatti i muscoli ciliari possono aumentare il potere del cristallino, ma solo fino ad un certo valore. Inoltre con l'avanzamento dell'età, la contrattilità dei muscoli ciliari e la elasticità del cristallino tendono a diminuire causando la diminuzione dell'aumento massimo di potere del cristallino durante l'accomodamento ed il conseguente allontanamento del punto prossimo.

Mentre dal punto di vista ottico l'umor acqueo e vitreo sono ben rappresentabili come due mezzi omogenei trasparenti ed isotropi, la schematizzazione della cornea e del cristallino, anche solo parassialmente, è molto più complicata a causa della loro natura stratiforme. Per questo motivo, sono stati sviluppati diversi modelli per schematizzare l'occhio umano nel calcolo delle sue caratteristiche parassiali. Nello schema n. 2 di Gullstrand la cornea è schematizzata come un singolo diottro sferico, che separa l'aria dall'umor acqueo, e il cristallino come una lente spessa biconvessa immersa tra l'umor acqueo e l'umor vitreo. Anche i due diottri che costituiscono il cristallino, essendo nell'ambito dell'approssimazione parassiale, sono supposti sferici ed infine l'umor acqueo e l'umor vitreo sono schematizzati come acqua pura. Nelle pagine che seguono sono riportate le ricette ottiche dell'occhio di Gullstrand n. 2 rilassato e accomodato per il punto prossimo.

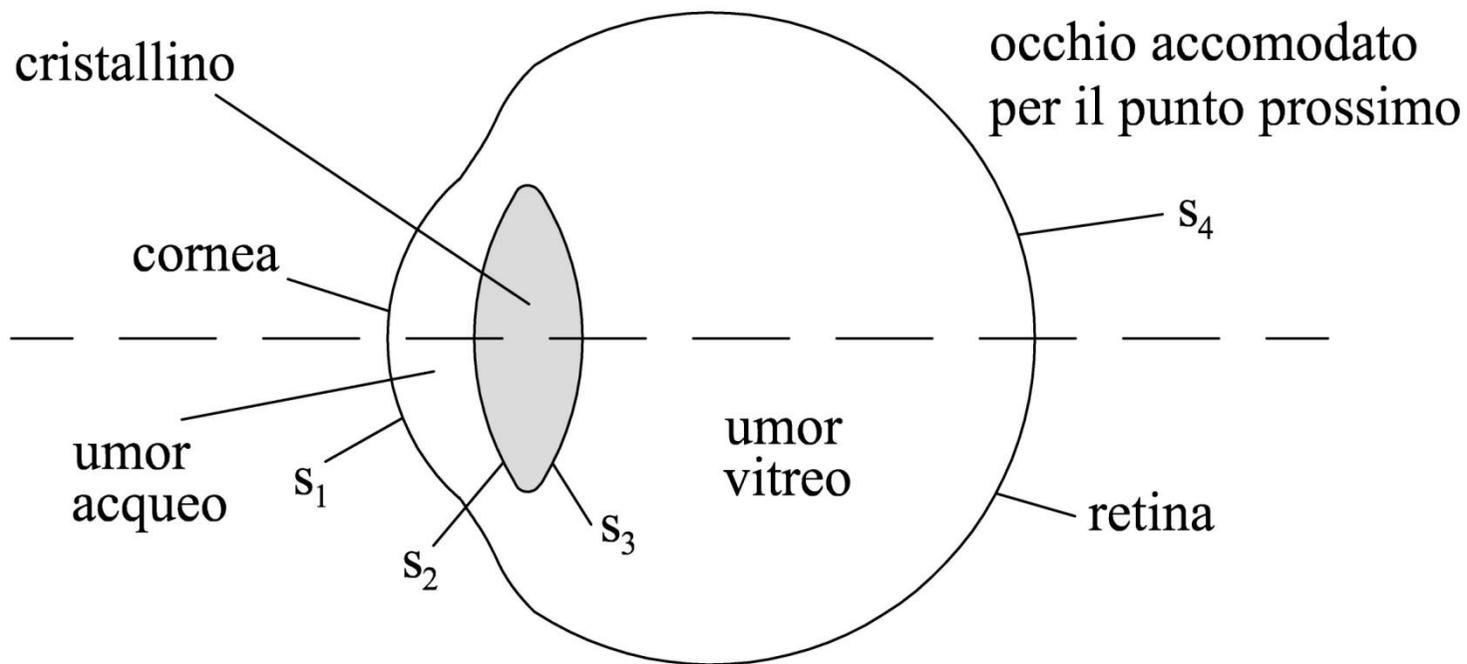
OCCHIO SCHEMATICO N. 2 DI GULLSTRAND - RILASSATO

	Radius (mm)	THI (mm)	REFRACTIVE INDEX @ 587.56	
OBJ:	INFINITY	INFINITY	1.00000	ARIA
1:	7.80000	3.600000	1.33333	UMOR ACQUEO
STO:	10.00000	3.600000	1.4160	
3:	-6.00000	16.696000	1.33333	UMOR VITREO
IMG:	-11.94800			



OCCHIO SCHEMATICO N. 2 DI GULLSTRAND - ACCOMODATO PER IL PUNTO PROSSIMO

	Radius (mm)	THI (mm)	REFRACTIVE INDEX @ 587.56	
OBJ:	INFINITY	116.298900	1.00000	ARIA
1:	7.80000	3.200000	1.33333	UMOR ACQUEO
STO:	5.00000	4.000000	1.4160	
3:	-5.00000	16.696000	1.33333	UMOR VITREO
IMG:	-11.94800			



Dall'analisi di queste ricette si osserva che Gullstrand nel suo secondo modello ha schematizzato l'occhio come una sfera il cui diametro è 24 mm. Infatti, sia per l'occhio rilassato che per l'occhio accomodato per il punto prossimo, la distanza cornea – retina risulta essere 23.896 mm, e inoltre la retina è anche essa una superficie sferica con un raggio di curvatura pari a -12 mm. Il punto prossimo è supposto in aria ad una distanza di 12 cm dalla cornea, e quest'ultima durante il processo di accomodamento non cambia raggio di curvatura che rimane uguale a 8 mm . Quindi, secondo questo modello di Gullstrand, durante l'accomodamento dell'occhio, il potere della cornea e la posizione della retina rispetto alla cornea non cambiano. L'accomodamento è solo effettuato dai muscoli ciliari che fanno spanciare il cristallino, alterandone il potere. Il confronto delle due ricette inoltre fornisce informazioni su come Gullstrand ha schematizzato questo spanciamento del cristallino.

Infatti dalle due ricette è facile verificare che la distanza tra le superfici $S_1 - S_3$, cioè tra la cornea e il secondo diottro che costituisce il cristallino, non cambia durante l'accomodamento dell'occhio. I muscoli ciliari fanno allora spianciare il cristallino dalla parte dell'umore acqueo. Infatti il raggio di curvatura del secondo diottro del cristallino durante l'accomodamento si riduce di poco, in valore assoluto, passando da -6 mm a -5 mm , mentre il raggio di curvatura del primo diottro subisce una forte riduzione, in valore assoluto, passando da -10 mm a -5 mm . Inoltre lo spessore del cristallino aumenta di 0.4 mm , mentre la distanza cornea - cristallino diminuisce dello stesso quantitativo.

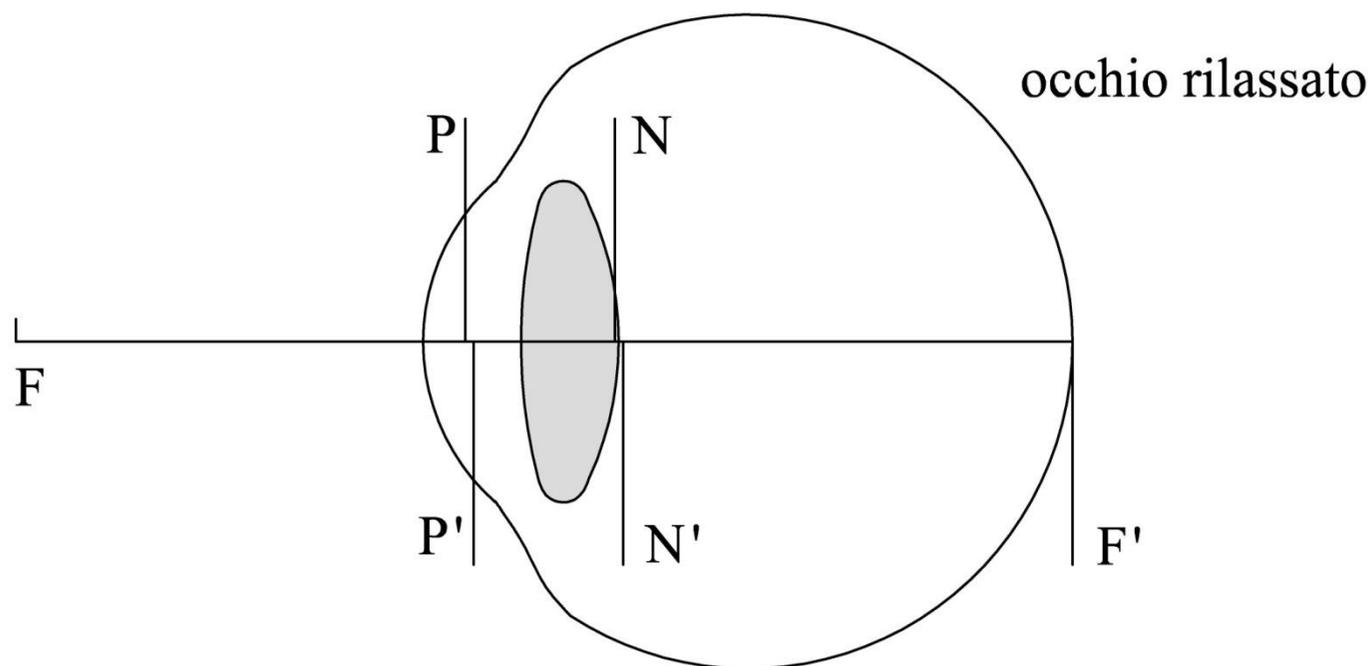
Come per i sistemi ottici considerati precedentemente, il calcolo delle caratteristiche parassiali dell'occhio è effettuato usando le formule per il tracciamento di un raggio meridiano parassiale. I risultati sono riportati nella seguente tabella.

Occhio schematico n. 2 di Gullstrand

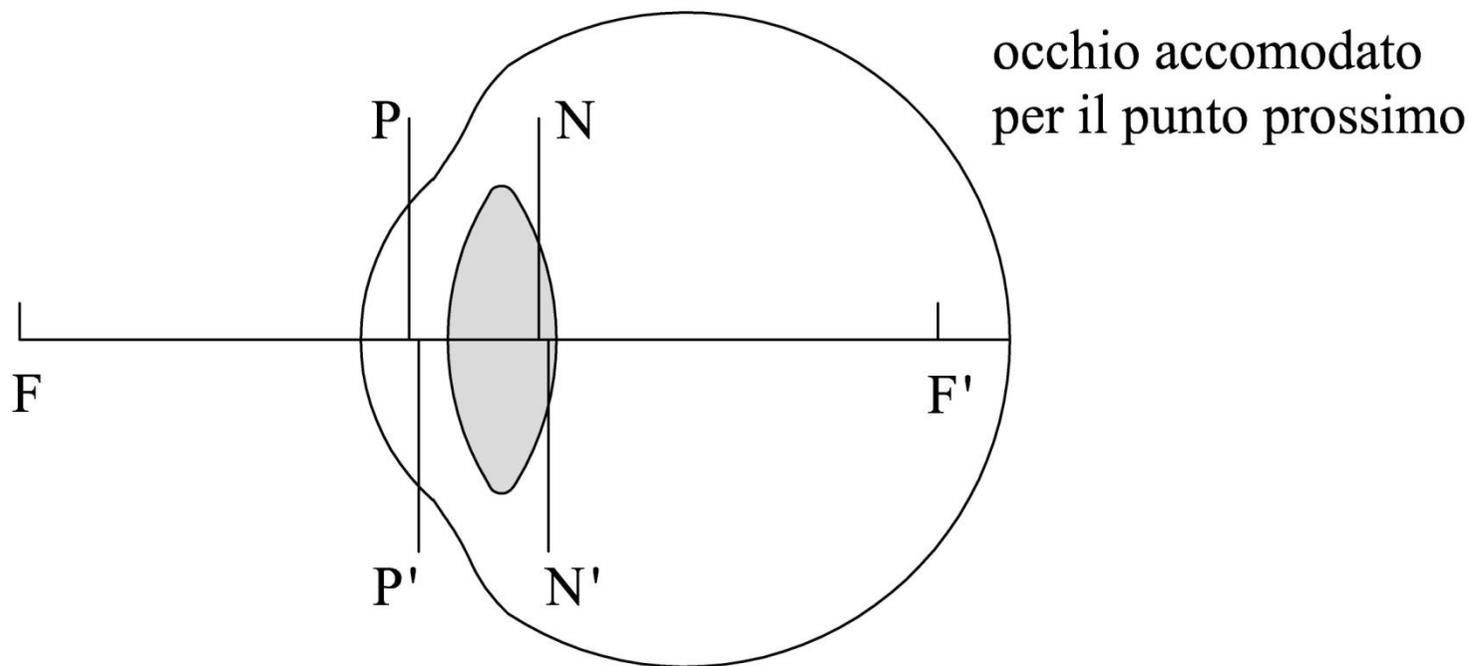
	rilassato	accomodato per il punto prossimo
f' (mm)	22.04	19.12
bfl (mm)	16.70	14.05
f (mm)	-16.53	-14.34
ffl (mm)	-14.98	-12.56
$l_N = l'_{N'}$ (mm)	5.51	4.78
Φ (D)	60.5	70
Φ cornea (D)	43	43
Φ cristallino (D)	22	32

Da questa si osserva che la lunghezza focale effettiva posteriore dell'occhio rilassato è 22 mm mentre per l'occhio accomodato per il punto prossimo vale 19 mm. Analogamente, la lunghezza focale effettiva anteriore vale, rispettivamente, nei due casi -16.5 mm e -14 mm. L'occhio rilassato secondo lo schema n. 2 di Gullstrand è allora un sistema ottico che possiede un potere di $60.5 \mathcal{D}$. Inoltre il suo potere aumenta di 9.5 diottrie quando esso è accomodato per il punto prossimo. Al potere dell'occhio partecipa maggiormente la cornea con un potere di $43 \mathcal{D}$, mentre il contributo del cristallino varia da $22 \mathcal{D}$ a $32 \mathcal{D}$ secondo il grado di accomodamento dell'occhio. Osserviamo inoltre come, a causa dell'accomodamento, il potere complessivo dell'occhio aumenta del 16%, a cui corrisponde una diminuzione della lunghezza focale effettiva posteriore del 13%, mentre il potere del cristallino subisce un aumento del 45%.

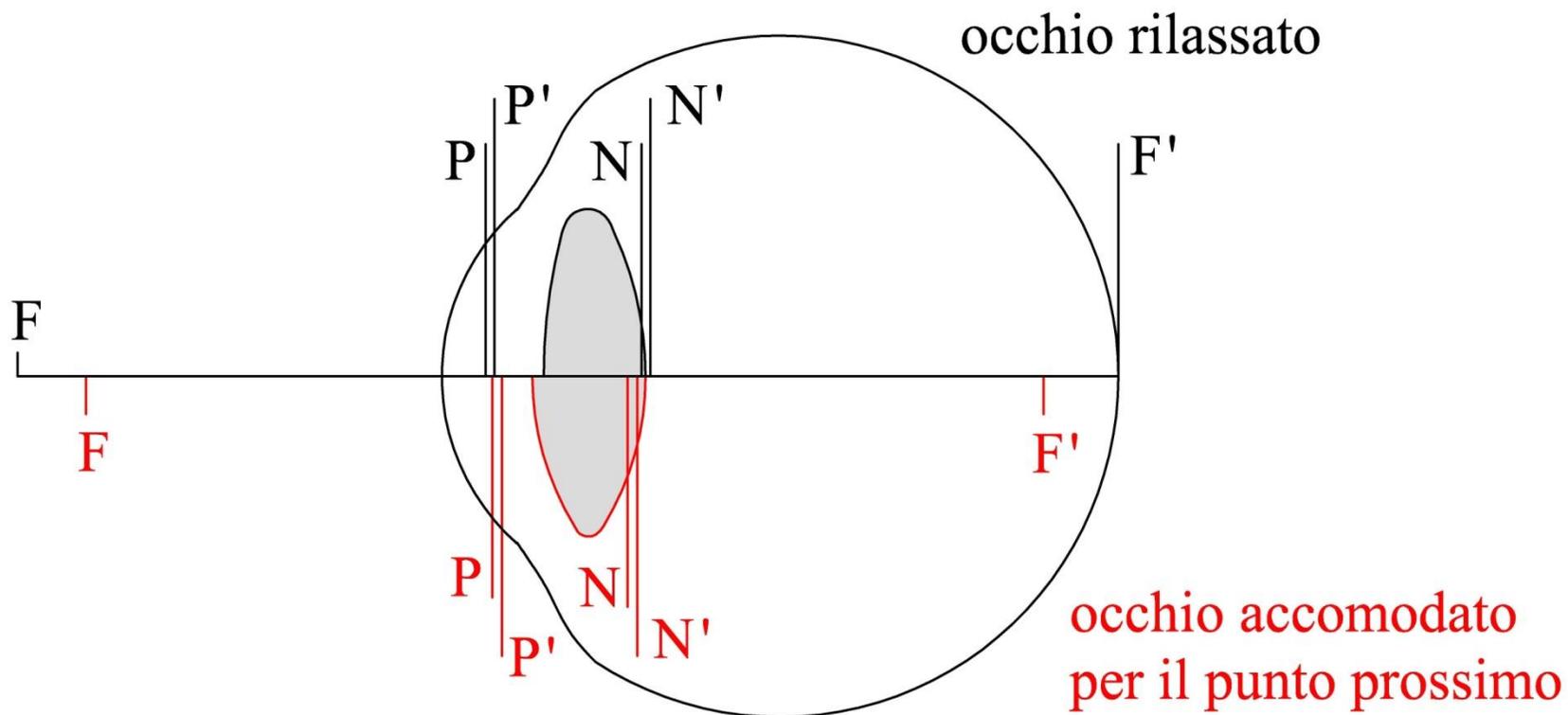
Utilizzando i risultati riportati in tabella è facile individuare, come è indicato nelle seguenti figure la posizione dei sei punti cardinali dell'occhio.



In particolare si osserva che, indipendentemente dal grado di accomodamento, lo iato e la distanza tra i piani nodali sono dell'ordine di 0.3 mm. Inoltre, grossolanamente, possiamo affermare che i piani principali sono localizzati a metà strada tra la cornea e il primo diottro che individua il cristallino, mentre i piani nodali sono situati in prossimità del secondo diottro del cristallino.



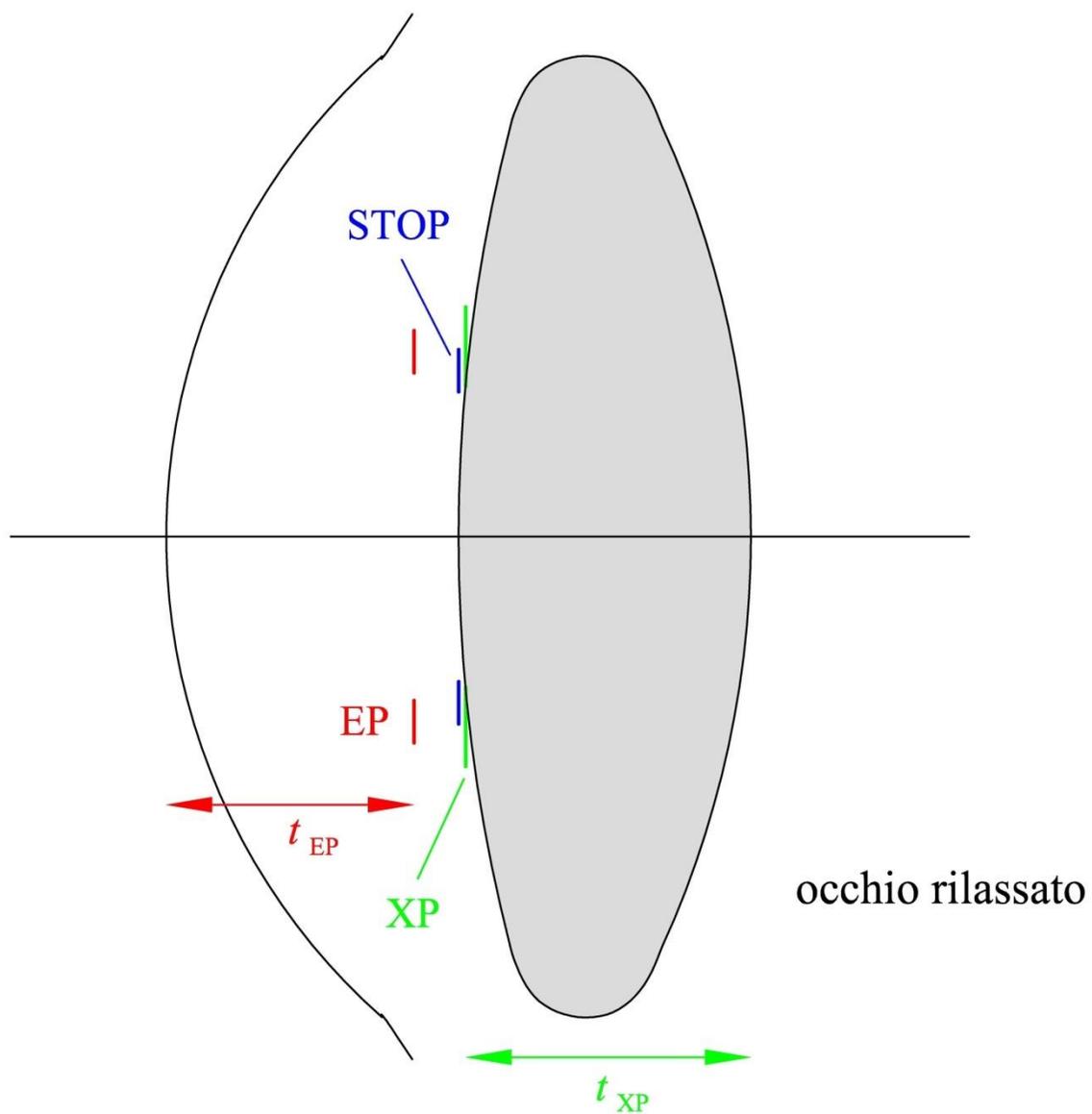
Quando l'occhio si accomoda per il punto prossimo si osserva che ciascun punto focale si avvicina alla cornea spostandosi di circa 2.5 mm rispetto alla posizione che gli compete quando l'occhio è rilassato.



Dalle due ricette ottiche dell'occhio schematico n. 2, si osserva come Gullstrand abbia supposto che lo stop sia sempre localizzato sul primo diottero del cristallino.

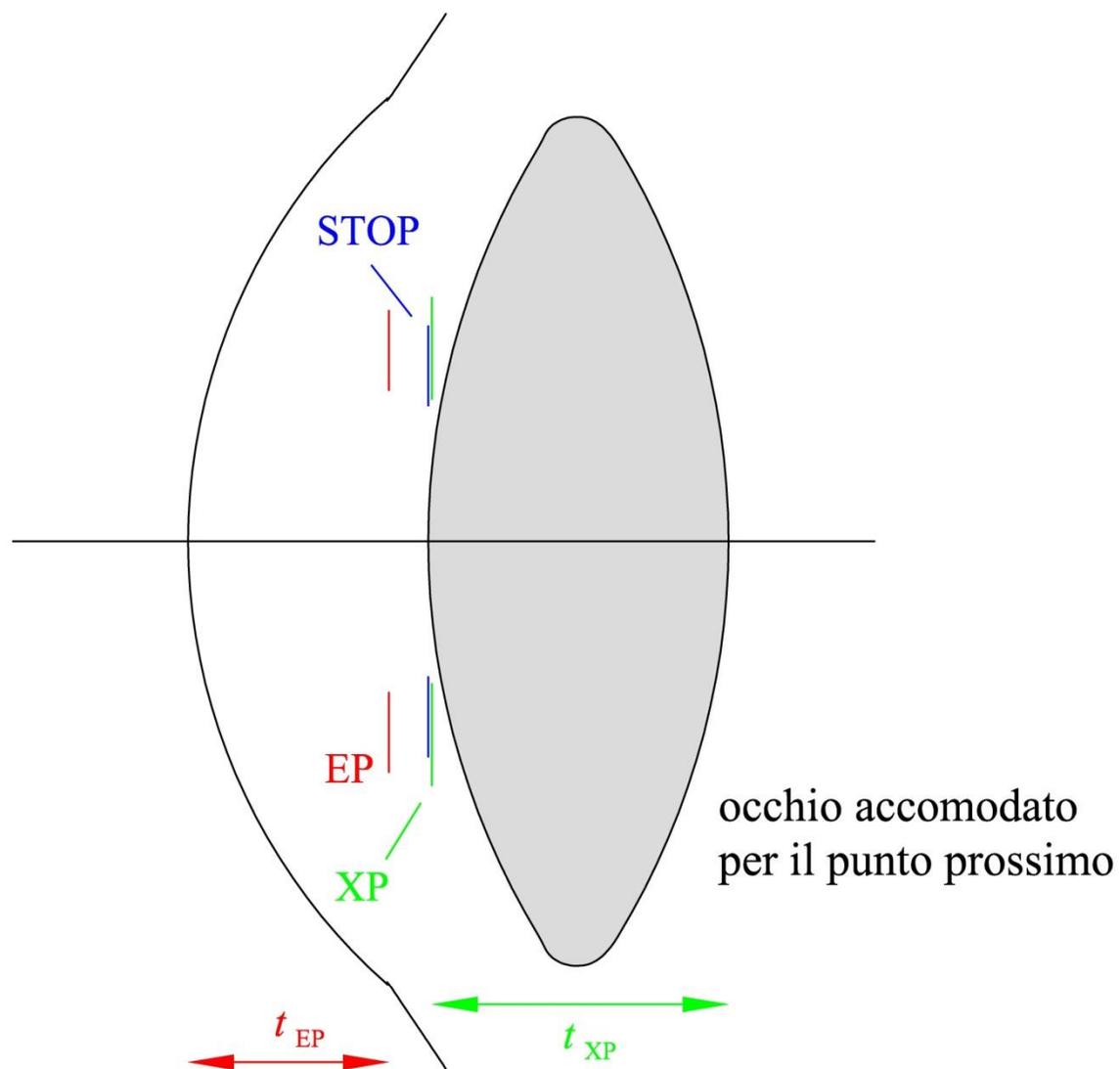
Passando dalla condizione di occhio rilassato a quella di occhio accomodato per il punto prossimo lo stop si avvicina di 0.4 mm alla cornea.

La posizione e il diametro della pupilla d'ingresso e della pupilla di uscita sono facilmente determinabili utilizzando le formule per il tracciamento di un raggio meridiano parassiale. I relativi risultati sono riportati nelle figure e tabelle che seguono.



t_{EP}	3.052 mm
ϕ_{EP}	$1.130 \cdot \phi_{Stop}$

t_{XP}	-3.513 mm
ϕ_{XP}	$1.036 \cdot \phi_{Stop}$



t_{EP}	2.674 mm
ϕ_{EP}	$1.114 \cdot \phi_{Stop}$

t_{XP}	-3.951 mm
ϕ_{XP}	$1.049 \cdot \phi_{Stop}$

ϕ_{EP} , ϕ_{XP} , ϕ_{Stop} indicano rispettivamente il diametro della pupilla di ingresso, della pupilla di uscita e dello stop.

Dai risultati sopra riportati si osserva, indipendentemente dall'accomodamento, che:

- la pupilla di ingresso e di uscita dell'occhio sono virtuali;
- la pupilla di uscita è praticamente localizzata sullo stop e il suo diametro supera quello dello stop di circa il 4%;
- la pupilla di ingresso è posizionata alla sinistra dello stop, la distanza EP – stop è circa il 17% della distanza cornea – stop e che il diametro della pupilla di ingresso è più grande, di circa il 10%, del diametro dello stop.