

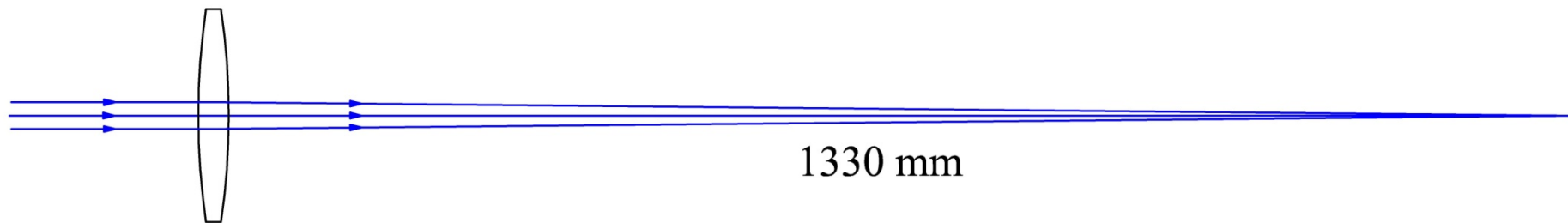
## CAPITOLO 4

# **APPROSSIMAZIONE PARASSIALE**

Quando i raggi, intercettati da un sistema ottico centrato, si propagano dal piano oggetto al piano immagine **rimanendo confinati in una regione molto prossima all'asse ottico**, si dice che il sistema ottico forma l'immagine dell'oggetto in **condizioni parassiali**.

Un esempio di sistema ottico che lavora in condizioni parassiali è dato da una lente obiettivo di uno dei cannocchiali di Galileo Galilei (1564-1642), mostrata nella seguente figura.

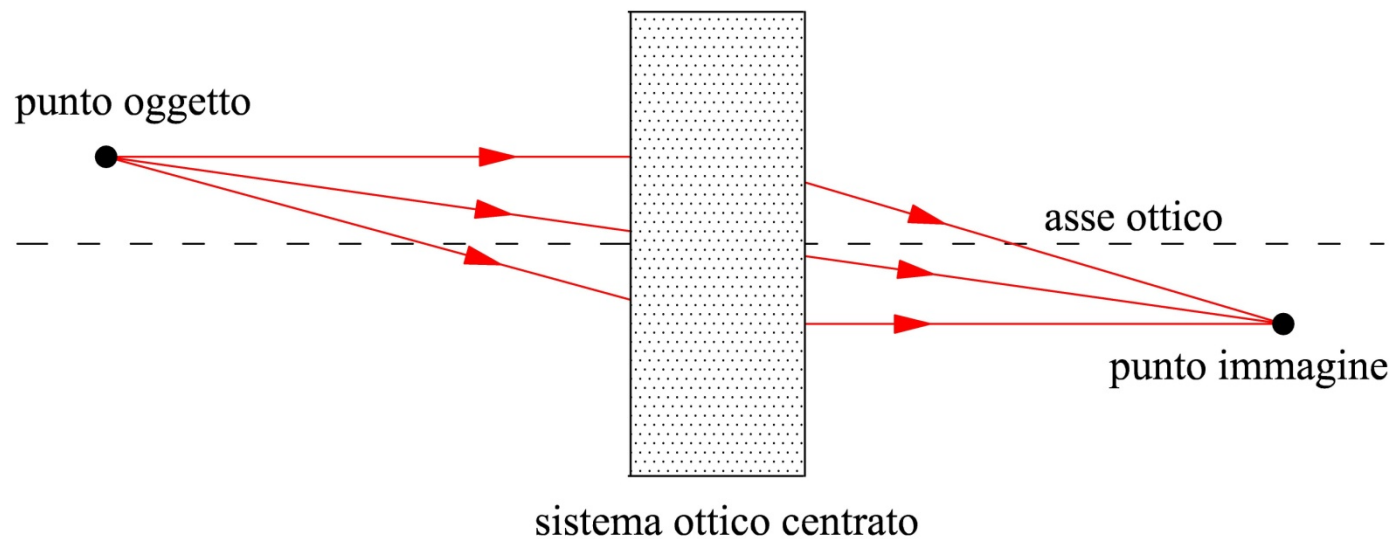
Obiettivo di un cannocchiale di Galileo Galilei



Lente: non e' in scala, diametro 51 mm, diametro utile 26 mm

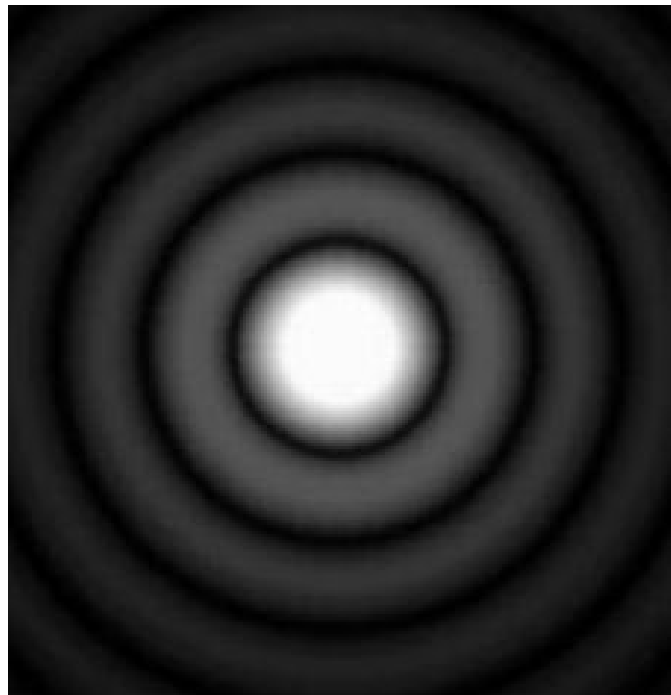
In **condizioni parassiali e separatamente per ciascuna lunghezza d'onda considerata** un sistema ottico **centrato** gode delle seguenti proprietà:

- è un sistema ottico **stigmatico**: tutti i raggi provenienti da una sorgente puntiforme della superficie oggetto, emergendo dal sistema ottico, si intersecano, loro od i loro prolungamenti, **tutti** in un unico punto della superficie immagine;



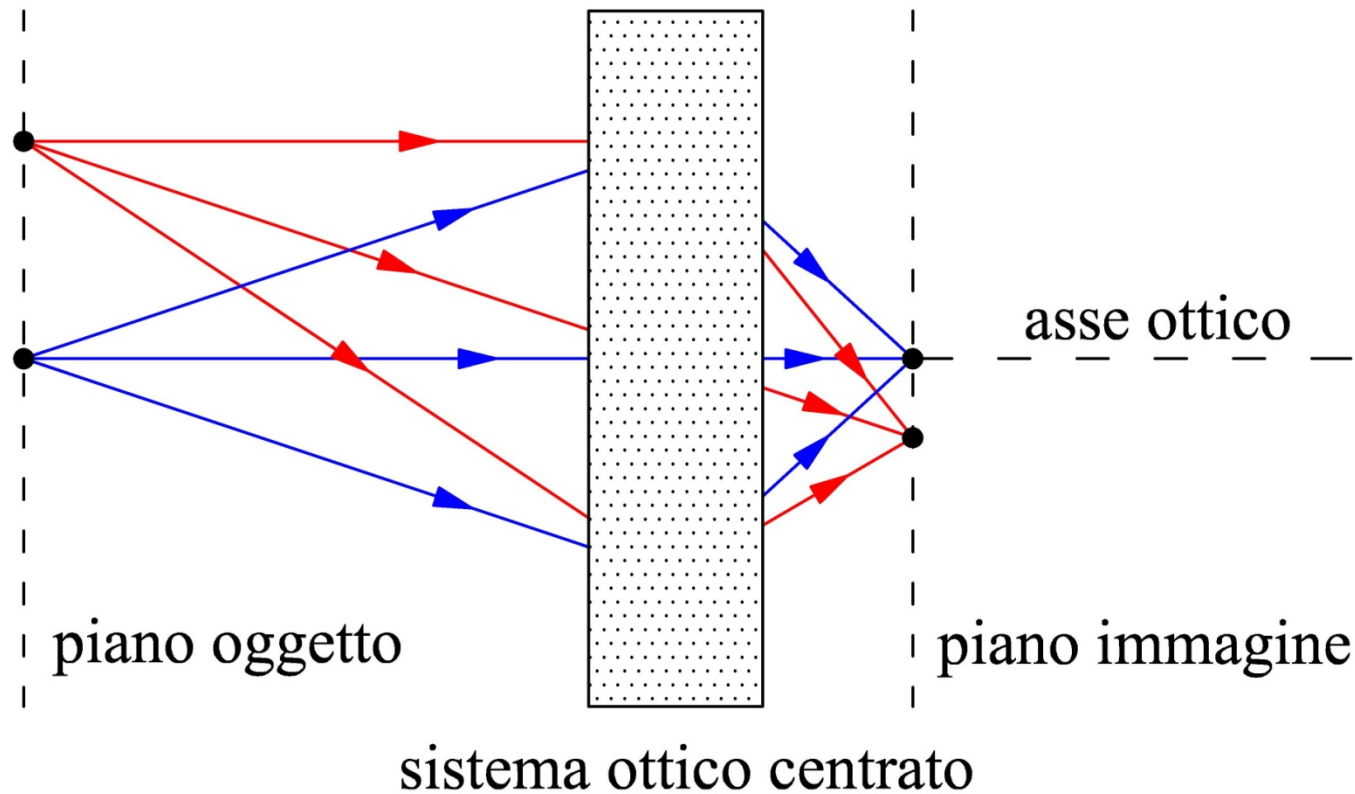
## ATTENZIONE

Lo *spot* (macchia di luce) che si osserva sperimentalmente sul piano immagine **non è esattamente puntiforme** a causa della **diffrazione**.

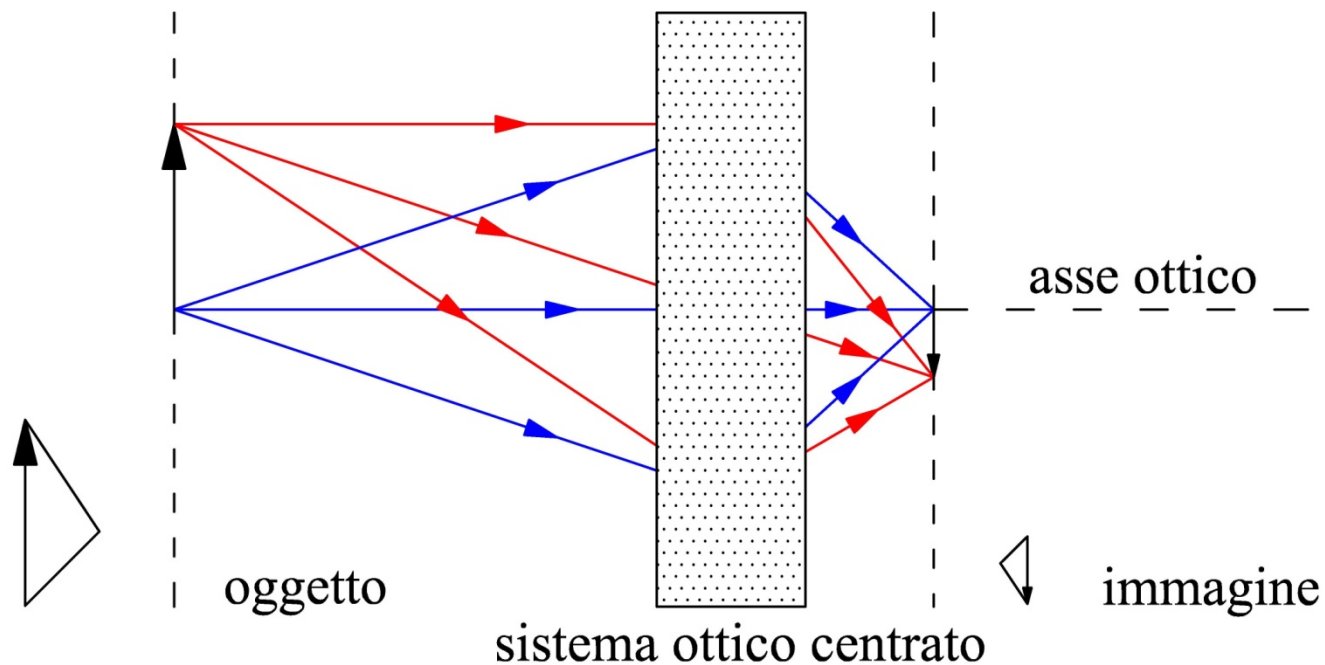


l'Ottica Geometrica con il suo modello **approssimato** di luce, basato sui raggi, **non riesce a tener conto** anche del fenomeno della **diffrazione**. Tuttavia le proprietà di *imaging* di un sistema ottico centrato, dedotte nell'ambito della Ottica Geometrica, **continuano ad avere un'enorme importanza in Ottica**. Infatti esse forniscono la **prima**, sebbene approssimata, **descrizione** del comportamento di un sistema ottico che viene inseguito **ampliata inglobando** in essa dei contributi ricavati utilizzando il **modello elettromagnetico** della luce;

- punti che stanno su uno stesso *piano oggetto*, perpendicolare all'asse ottico, hanno tutti la loro immagine su uno stesso *piano immagine* anch'esso perpendicolare all'asse ottico; in questo caso i due piani sono detti **coniugati**;



- l'immagine di un oggetto composto da diverse sorgenti puntiformi poste su un piano perpendicolare all'asse ottico, è una figura simile, dal punto di vista geometrico, all'oggetto. Il rapporto di similitudine (**ingrandimento**) non cambia spostando l'oggetto sullo stesso piano oggetto, ma varia al variare del piano oggetto considerato.



Per proseguire nel nostro studio delle proprietà di *imaging* di un sistema ottico centrato in condizioni parassiali, è importante studiare **le formule per il tracciamento dei raggi meridiani parassiali**.

**Tracciare** un generico raggio (*ray tracing*) attraverso un generico sistema ottico vuol dire:

**conoscendo**

- tutti i dettagli del sistema ottico (forma di tutte le superfici che lo compongono, posizione di ciascuna superficie rispetto alla superficie precedente, indice di rifrazione dei mezzi presenti tra le superfici alle lunghezze d'onda di interesse, posizione e dimensione dello stop),
- la posizione del punto oggetto da cui ha origine il raggio considerato e la direzione di quest'ultimo,



**calcolare** su ogni superficie del sistema ottico

- ❖ il punto e la direzione di incidenza del raggio considerato,
- ❖ la direzione che assume il raggio dopo la rifrazione o la riflessione.

Nel caso di un sistema ottico **centrato** e di raggi **meridiani parassiali** le formule per il tracciamento di un raggio **sono molto semplici**.

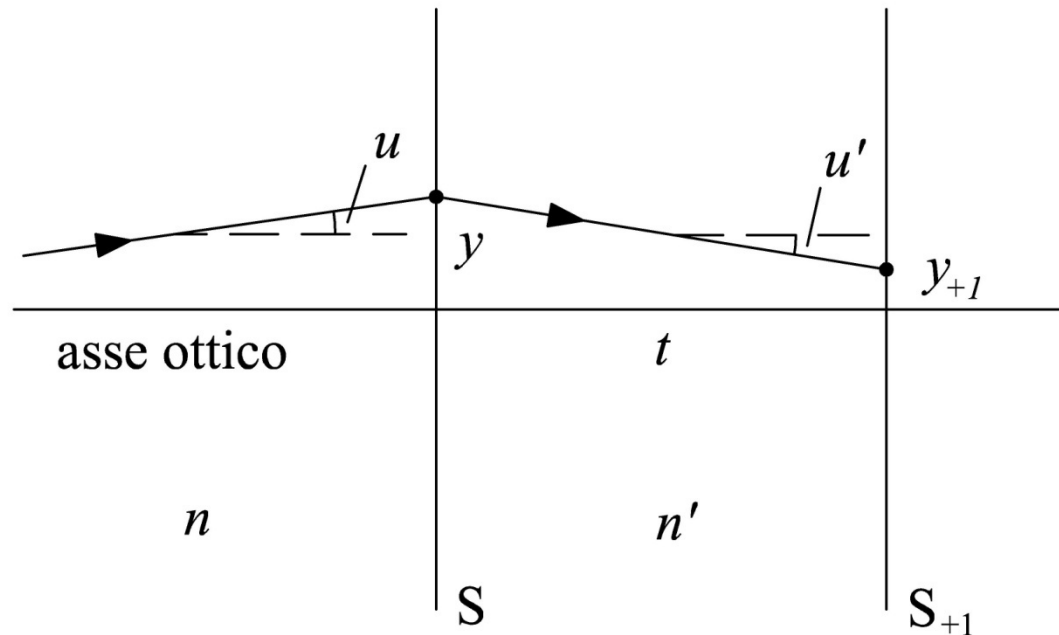
Come abbiamo mostrato nel precedente capitolo, un raggio **meridiano** ha la proprietà di attraversare tutto il sistema ottico centrato rimanendo sempre confinato su un piano contenente l'asse ottico.

Non si perde, quindi, in generalità se supponiamo che il raggio meridiano da tracciare giaccia sul piano  $y - z$ , dove l'asse  $z$  coincide con l'asse ottico.

La condizione di **parassialità** inoltre permette due ulteriori semplificazioni:

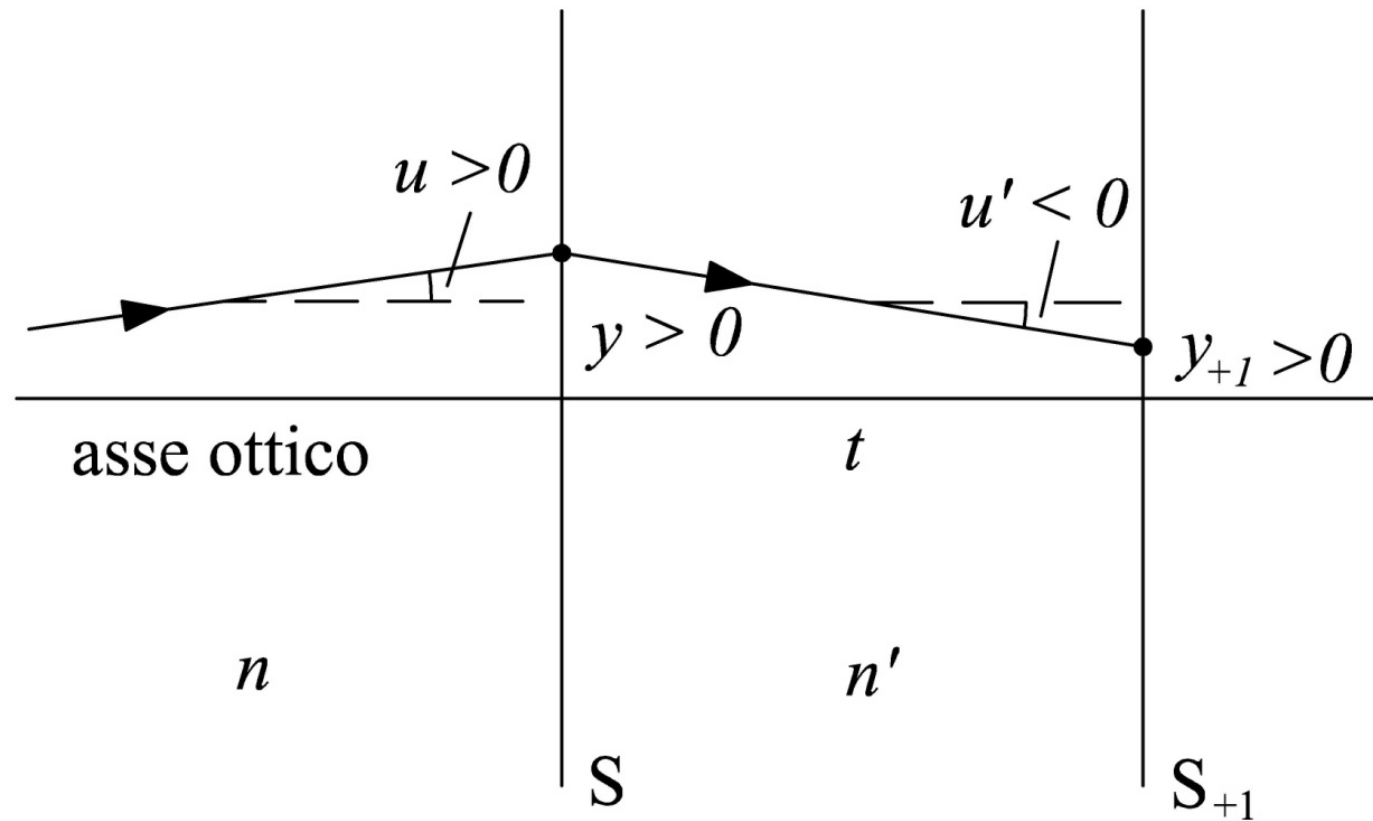
- per il calcolo dei punti di incidenza, **e solo per questo**, è lecito considerare tutte le superfici costituenti il sistema ottico come dei **piani**;
- al fine della determinazione della normale, necessaria per l'applicazione della legge di Snell o della riflessione, è lecito approssimare ciascuna superficie con la rispettiva **sfera** osculatrice nel vertice. In altre parole possiamo dire che, parassialmente, **per la determinazione della normale una superficie asferica generalizzata non si differenzia dalla sua sfera osculatrice.**

In figura è mostrata una generica superficie  $S$  di un sistema ottico centrato e la superficie immediatamente successiva  $S_{+1}$ .



Tracciare un raggio meridiano attraverso un sistema ottico centrato significa determinare su tutte le superfici, costituenti il sistema ottico, l'**altezza**  $y$  e l'**angolo**  $u$  mostrati in figura.

L'altezza  $y$  è considerata **positiva (negativa)** se il punto in cui il raggio incide su  $S$  è **sopra (sotto)** l'asse ottico. L'angolo  $u$  è misurato in radianti a partire dalla asse ottico ed è **positivo nel verso antiorario**.



Le seguenti formule:

$$n' u' = n u - (n' - n) c y$$

$$y_{+1} = y + t u'$$

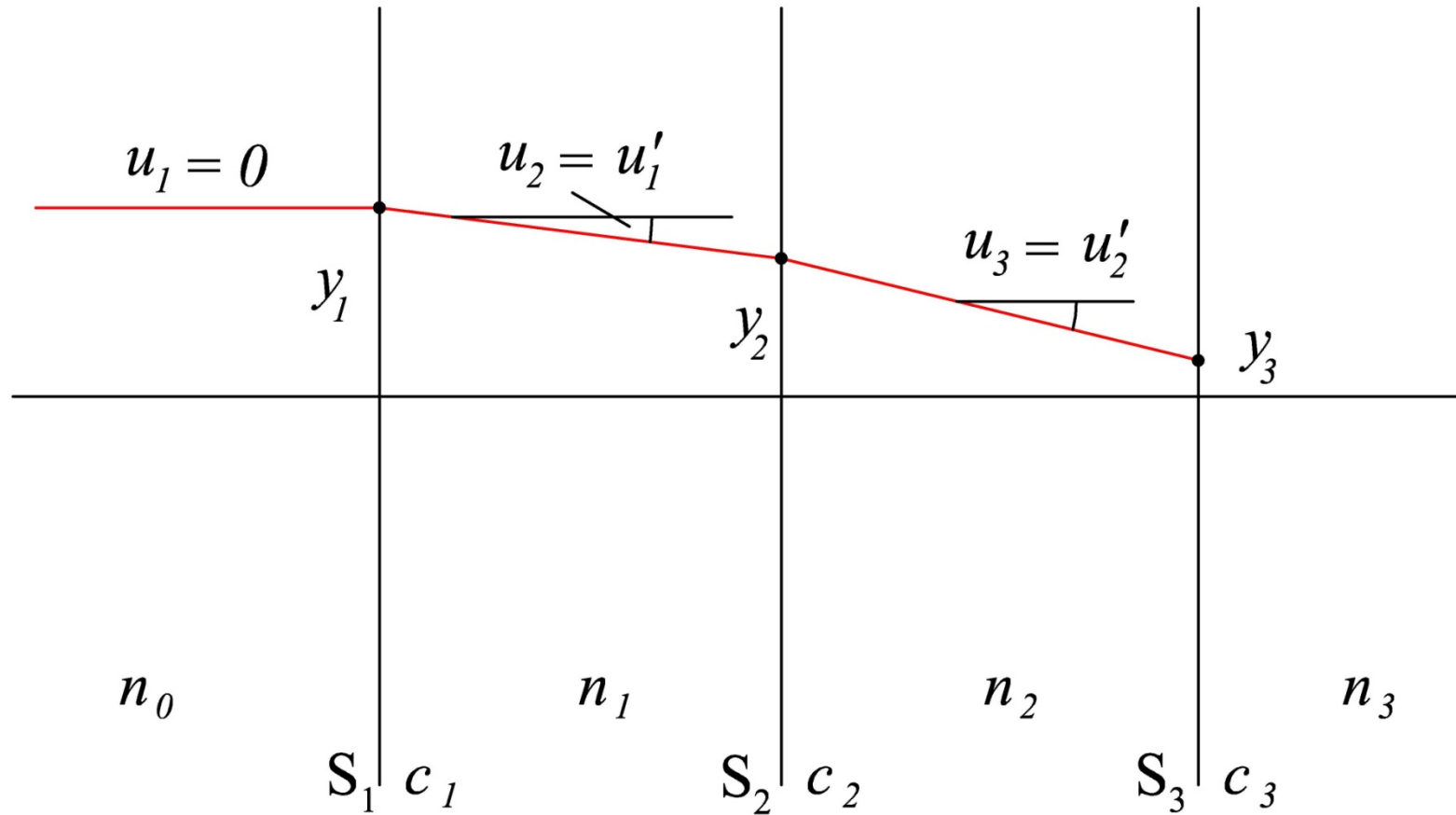
dove  $c$  è la curvatura nel vertice della generica superficie  $S$ , sono conosciute come **le formule per il tracciamento di un raggio meridiano parassiale attraverso un sistema ottico centrato**. Queste formule si applicano sia nel caso che  $S$  sia una superficie rifrangente, sia nel caso che sia una superficie riflettente. Nel secondo caso  $u'$  è l'angolo associato al raggio riflesso. Le formule sopra riportate discendono direttamente dalla legge di Snell o dalla legge della riflessione e dalla legge della propagazione rettilinea della luce.

$$n' u' = n u - (n' - n) c y$$

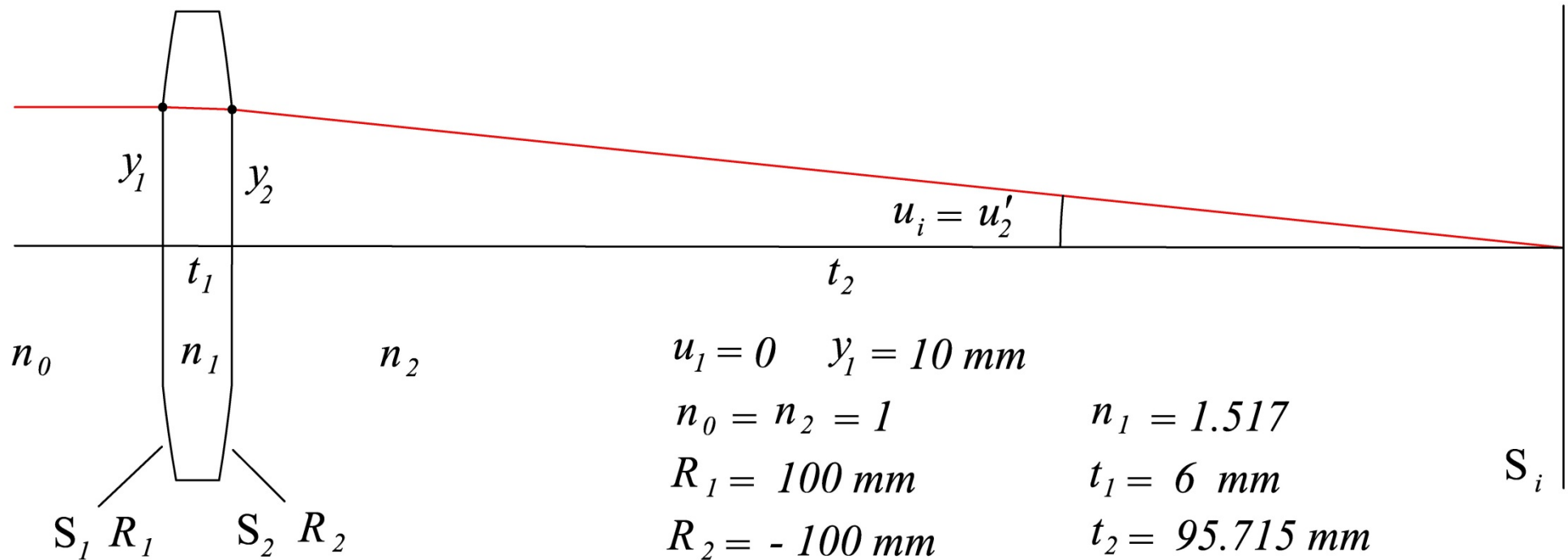
$$y_{+1} = y + t u'$$

Osservando le formule per il tracciamento di un raggio meridiano parassiale si osserva che con esse è possibile determinare  $u'$  e  $y_{+1}$  conoscendo  $u, y, n, n', c$  e  $t$ . Il tracciamento di un raggio meridiano parassiale allora inizia calcolando  $u_1$  e  $y_1$  sulla prima superficie  $S_1$  del sistema ottico utilizzando la conoscenza della posizione del punto oggetto da cui ha origine il raggio considerato e la direzione di quest'ultimo. Il tracciamento prosegue poi calcolando, utilizzando le formule sopra riportate e la conoscenza di  $u_1$  e  $y_1$ , le grandezze  $u_2 = u'_1$  e  $y_2$  relative alla superficie  $S_2$  del sistema ottico. Iterando, poi, quest'ultima operazione

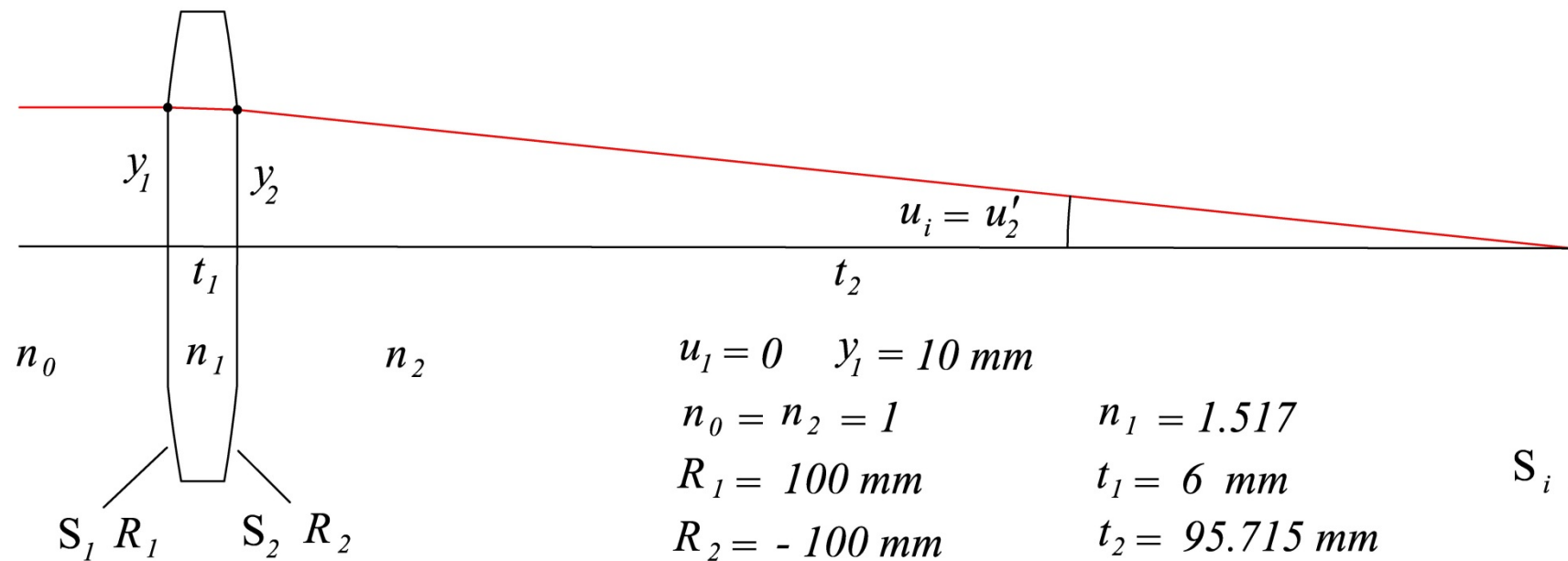
si determinano le grandezze  $u$  e  $y$  del raggio considerato su tutte le superfici ottiche di cui è composto il sistema ottico fino ad arrivare alla  $S_i$ .



Allo scopo di fornire un esempio di applicazione delle formule appena descritte, consideriamo la lente mostrata in figura e tracciamo attraverso di essa un raggio parallelo all'asse ottico.



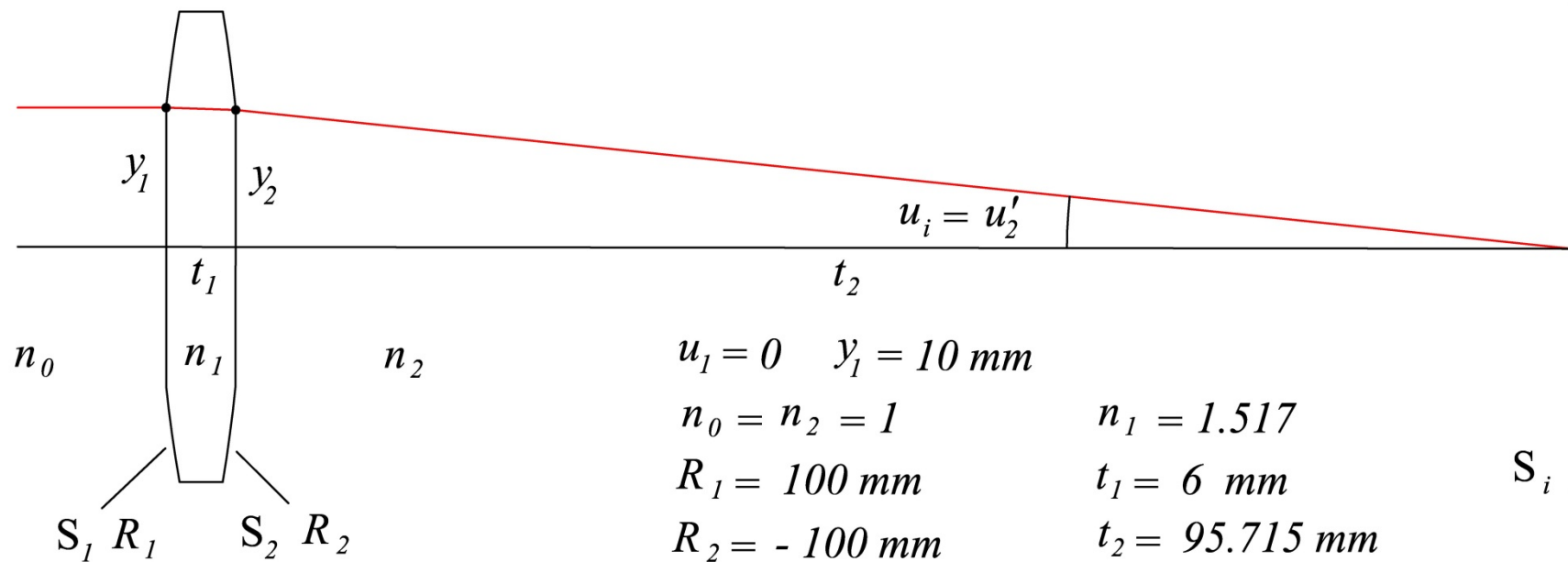




$$n_1 u'_1 = n_0 u_1 - (n_1 - n_0) c_1 y_1 = -\frac{0.517 \cdot 10}{100}$$

$$\Rightarrow u'_1 = -\frac{0.0517}{1.517} = -0.034080 = u_2$$

$$y_2 = y_1 + t_1 u'_1 = (10 - 6 \cdot 0.034080) \text{ mm} = 9.7955 \text{ mm}$$



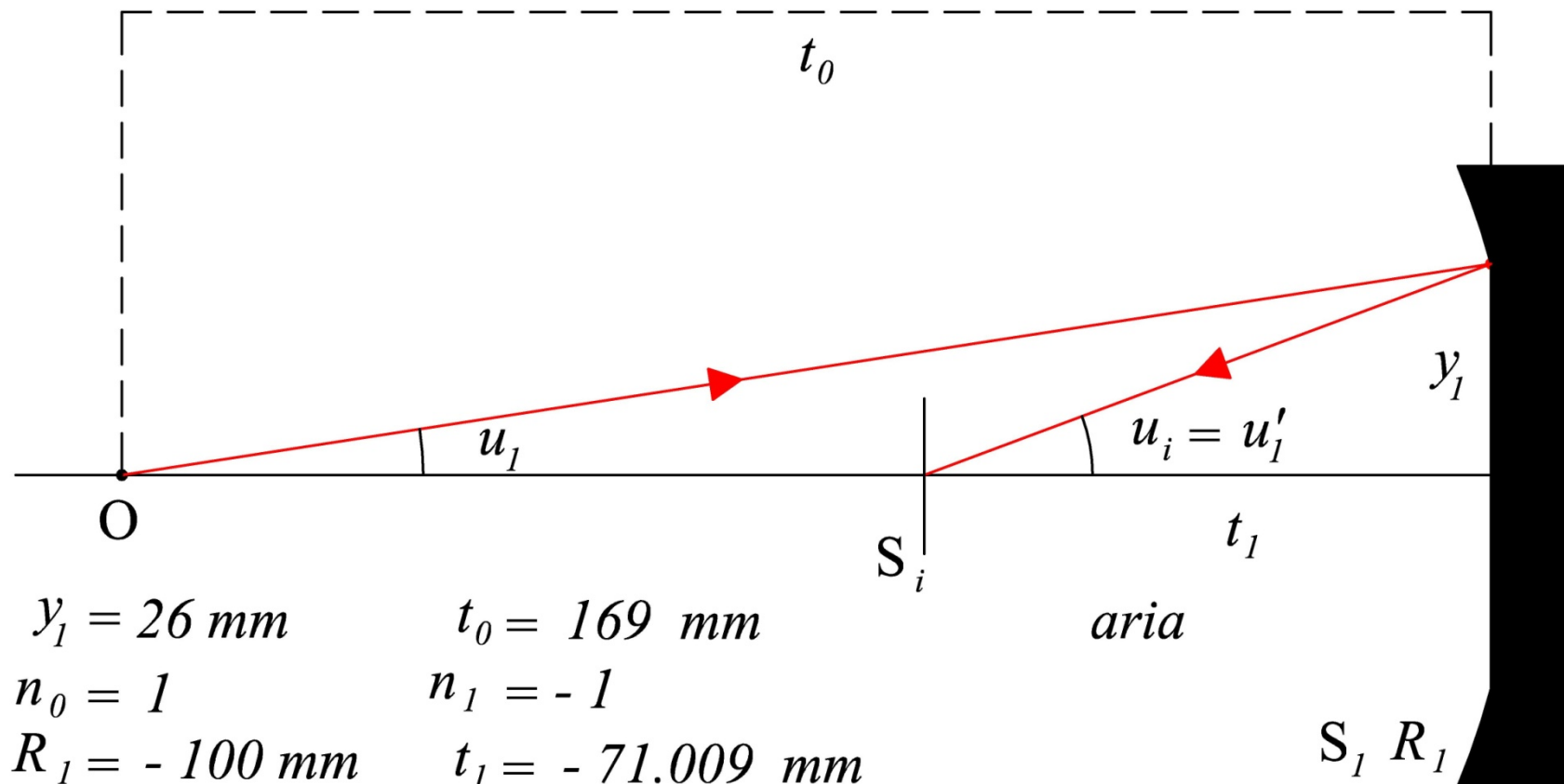
$$n_2 u'_2 = n_1 u_2 - (n_2 - n_1) c_2 y_2$$

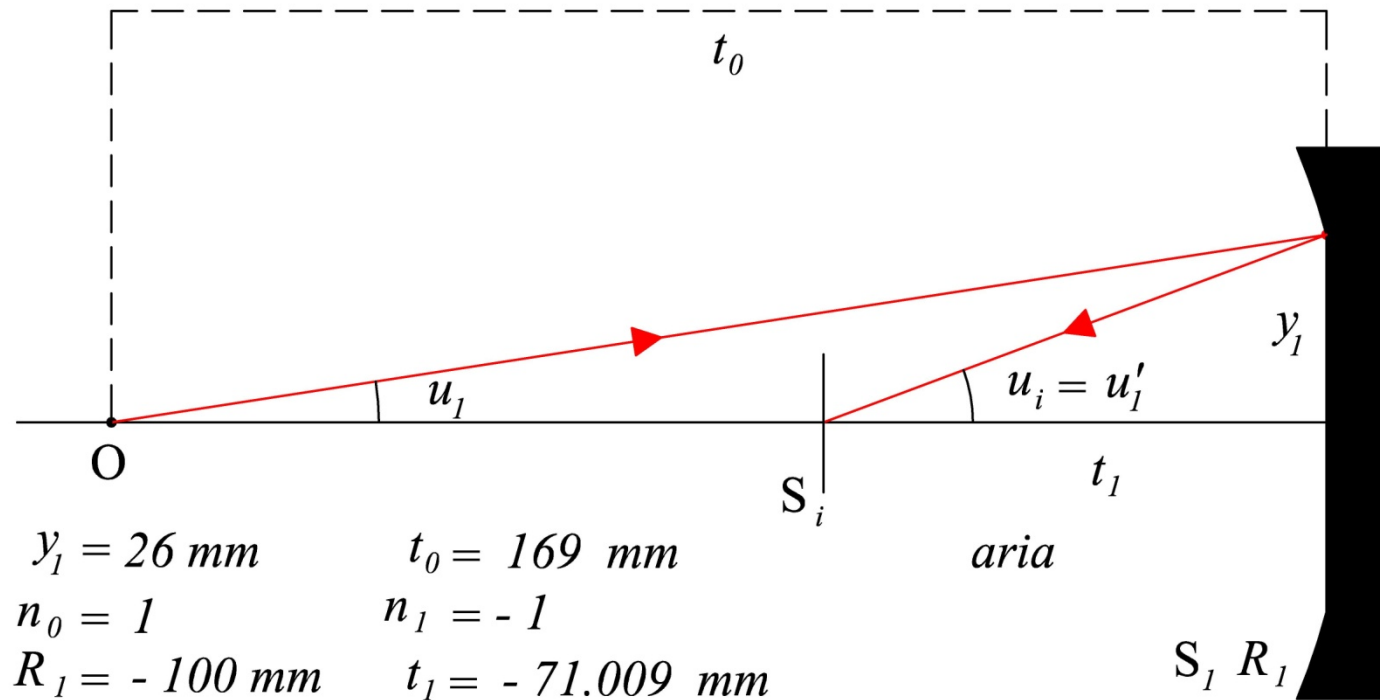
$$= -1.517 \cdot 0.034080 - (-0.517) \frac{9.7955}{-100}$$

$$\Rightarrow u'_2 = -0.10234 = u_i$$

$$y_i = y_2 + t_2 u'_2 = (9.7955 - 95.715 \cdot 0.10234) \text{ mm} = 0.0000 \text{ mm}$$

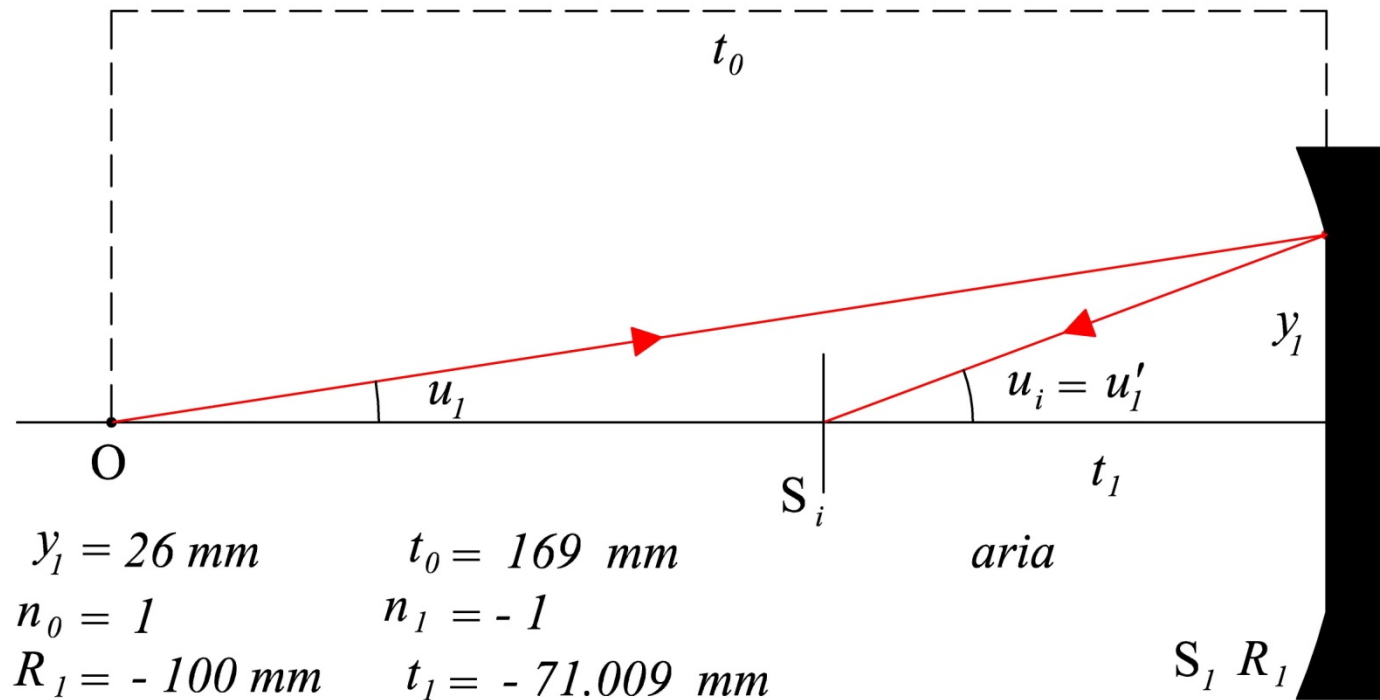
Come ulteriore esempio, consideriamo lo specchio sferico disegnato in figura e tracciamo un raggio proveniente dalla sorgente  $O$  posta sull'asse ottico.





$$y_1 = y_0 + t_0 u_1 \quad \Rightarrow \quad 26 \text{ mm} = 0 + 169 \text{ mm} \cdot u_1$$

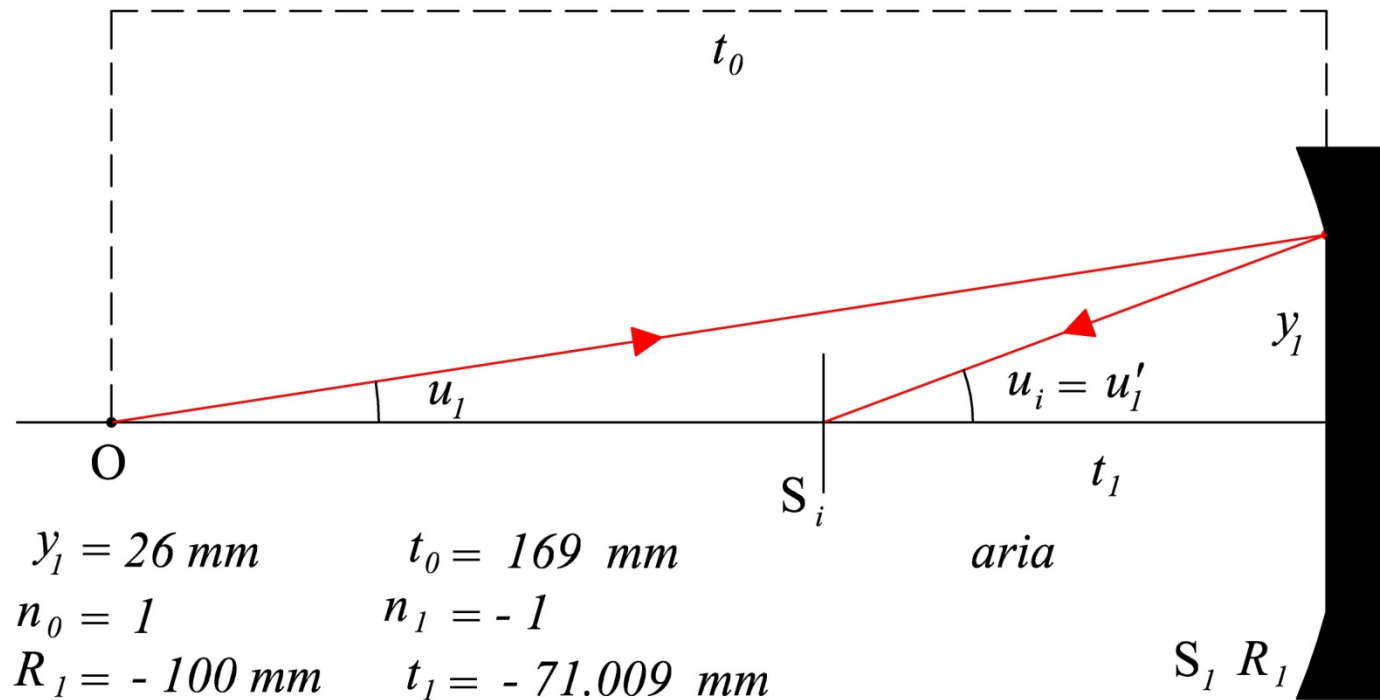
$$\Rightarrow \quad u_1 = \frac{26}{169} = 0.15385$$



$$n_1 u'_1 = n_0 u_1 - (n_1 - n_0) c_1 y_1 \quad \Rightarrow \quad -u'_1 = u_1 - (-1 - 1) c_1 y_1$$

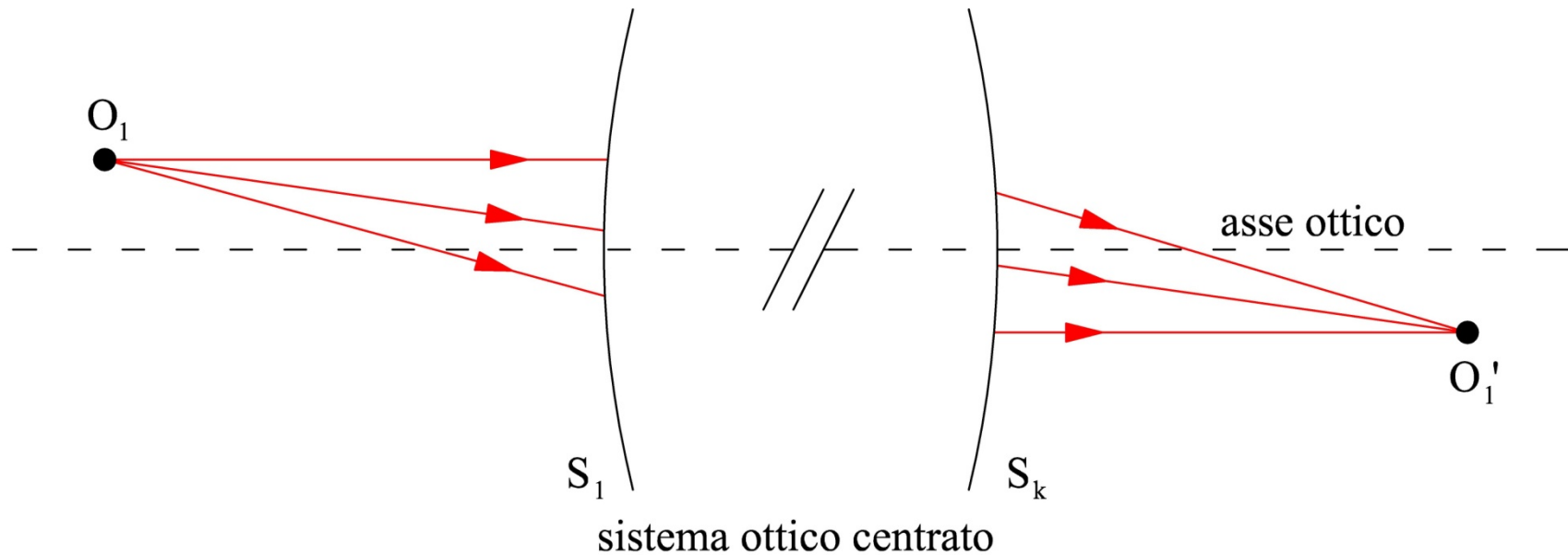
$$\Rightarrow u'_1 = -u_1 - 2c_1 y_1 = -0.15385 - \frac{2 \cdot 26}{-100} = -0.15385 + 0.52$$

$$u'_1 = 0.36615$$

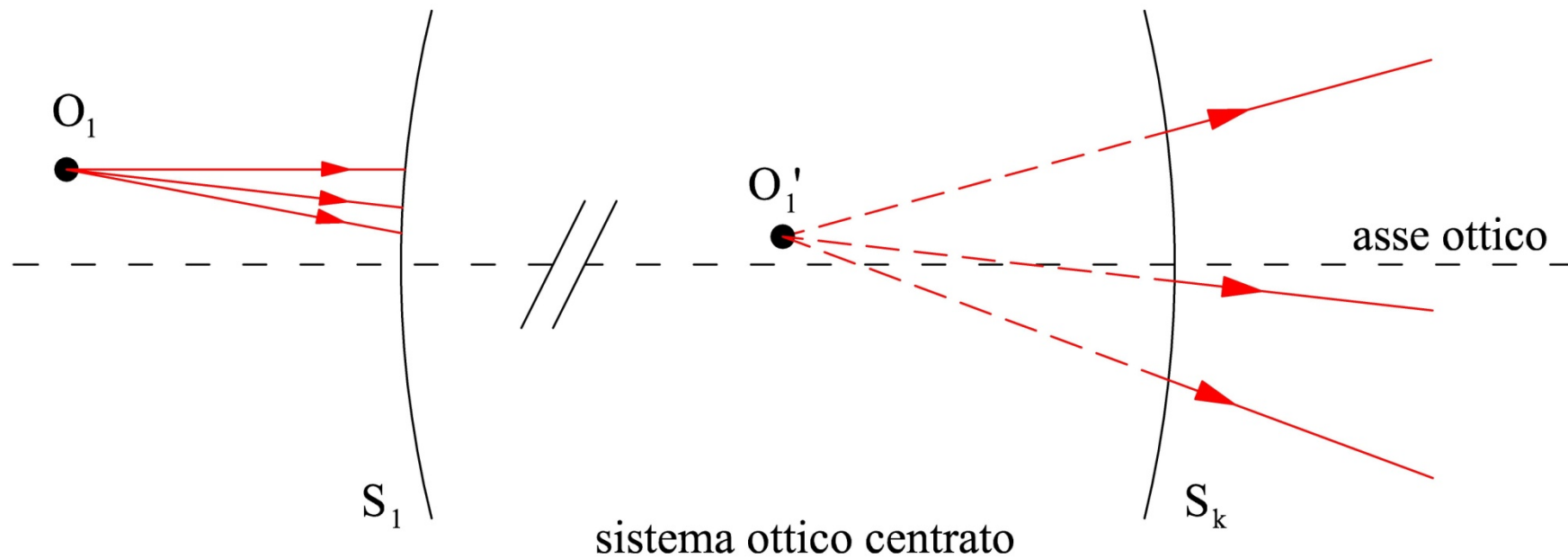


$$y_i = y_1 + t_1 u'_1 = (26 - 71.009 \cdot 0.36615) \text{ mm} = 0.0000 \text{ mm}$$

L'immagine  $O'_1$  di una generica sorgente puntiforme  $O_1$ , fatta da un sistema ottico centrato in condizioni parassiali, si dice **reale** quando i raggi, provenienti da  $O_1$ , emergono dall'ultima superficie del sistema ottico convergenti verso  $O'_1$ .

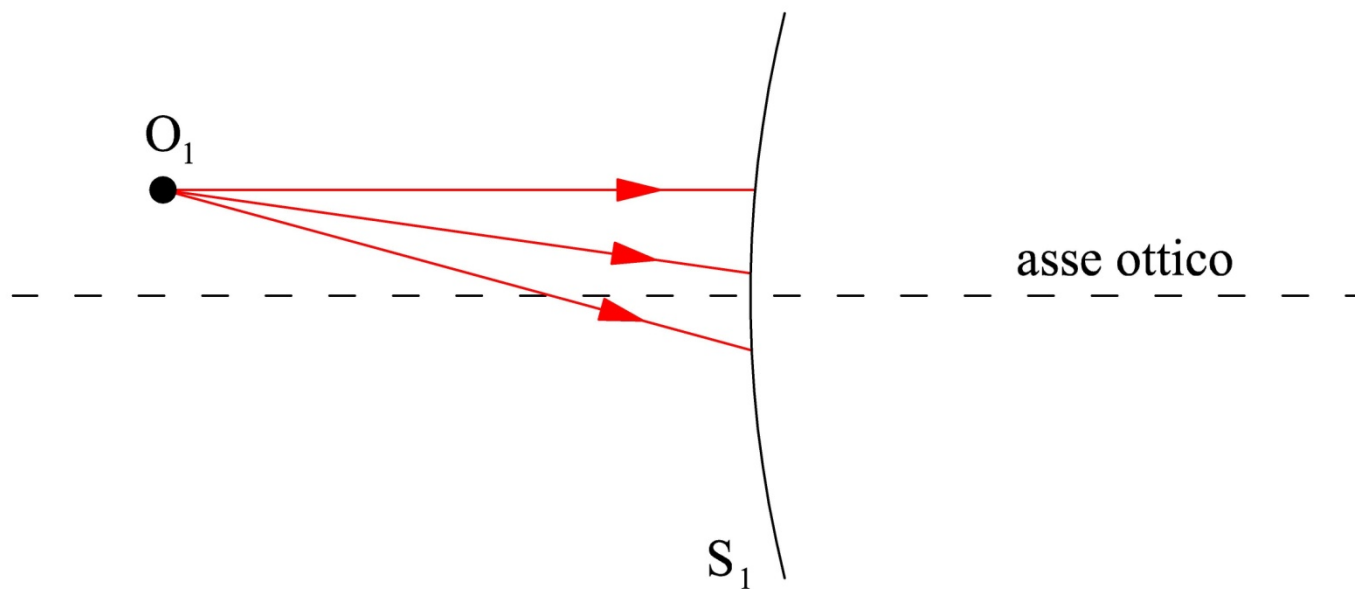


L'immagine  $O'_1$  invece si dice **virtuale** quando i raggi, provenienti da  $O_1$ , emergono da  $S_k$  divergenti da  $O'_1$ .

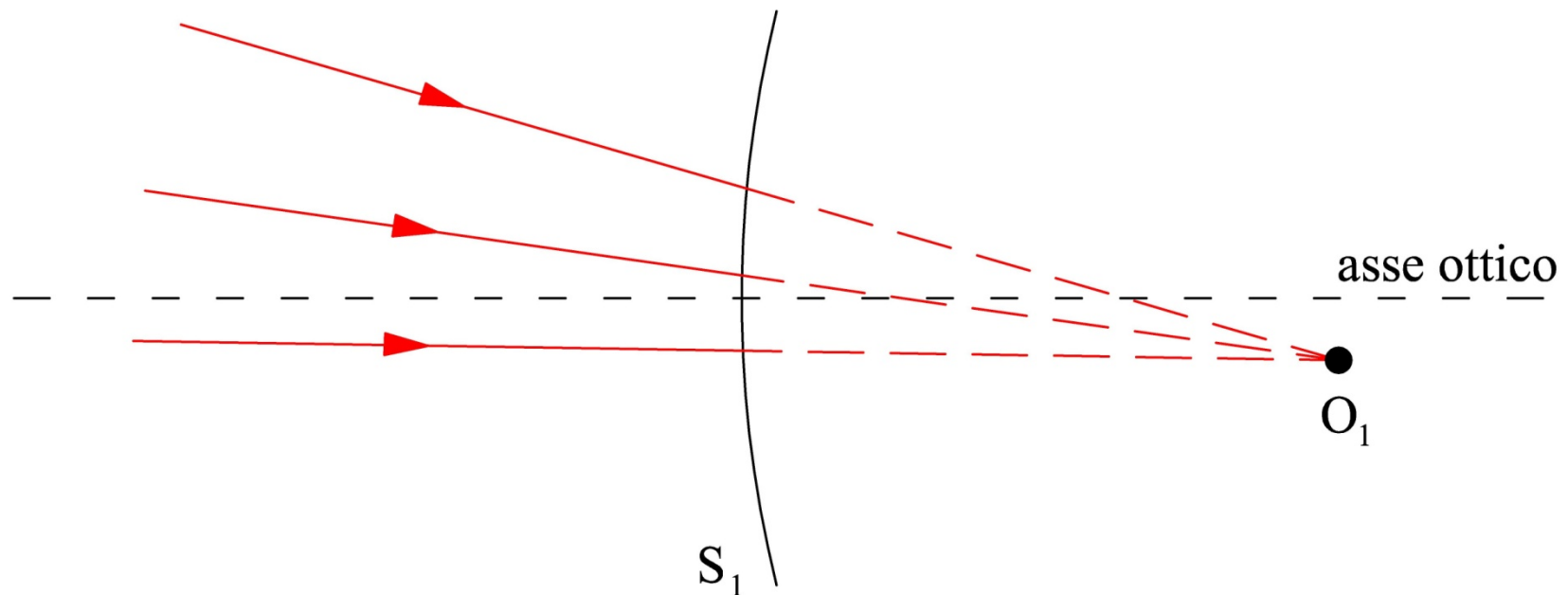




Analogamente la sorgente puntiforme  $O_1$  si dice **reale** se i raggi incidono sulla prima superficie del sistema ottico centrato, divergendo da  $O_1$ .

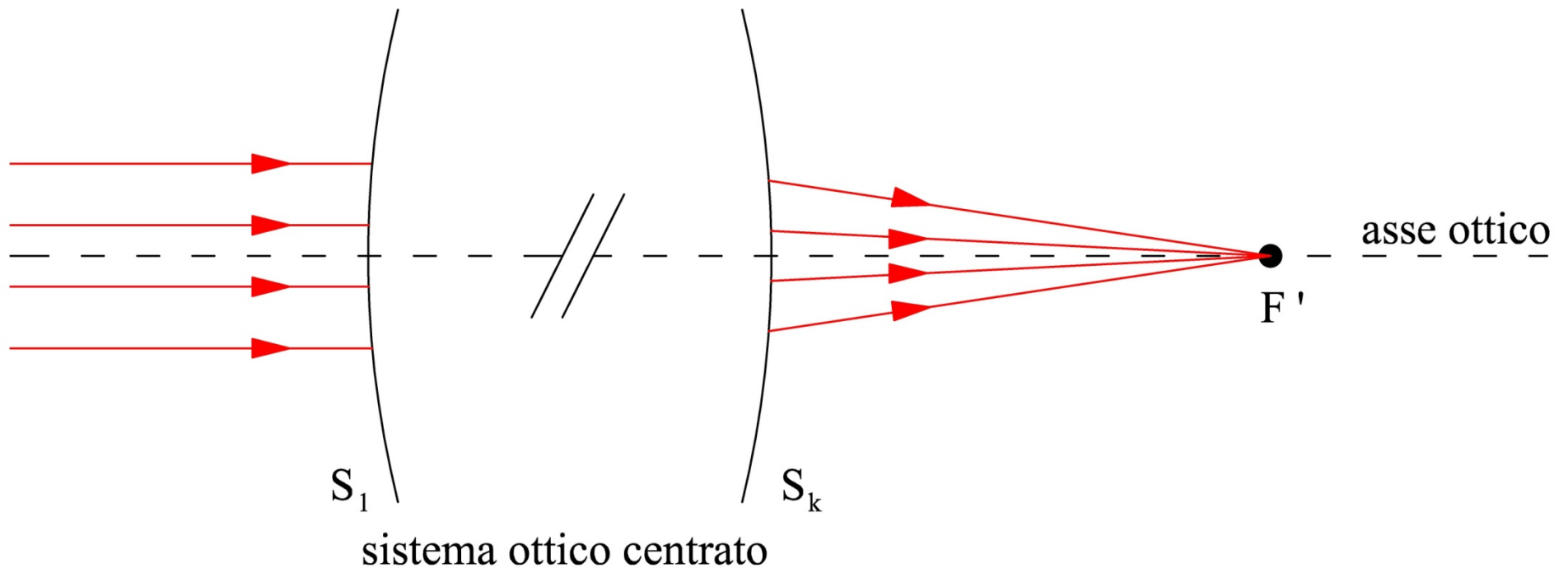


Infine la sorgente puntiforme  $O_1$  si dice **virtuale** se i raggi incidono sulla prima superficie del sistema ottico centrato, convergendo verso  $O_1$ .

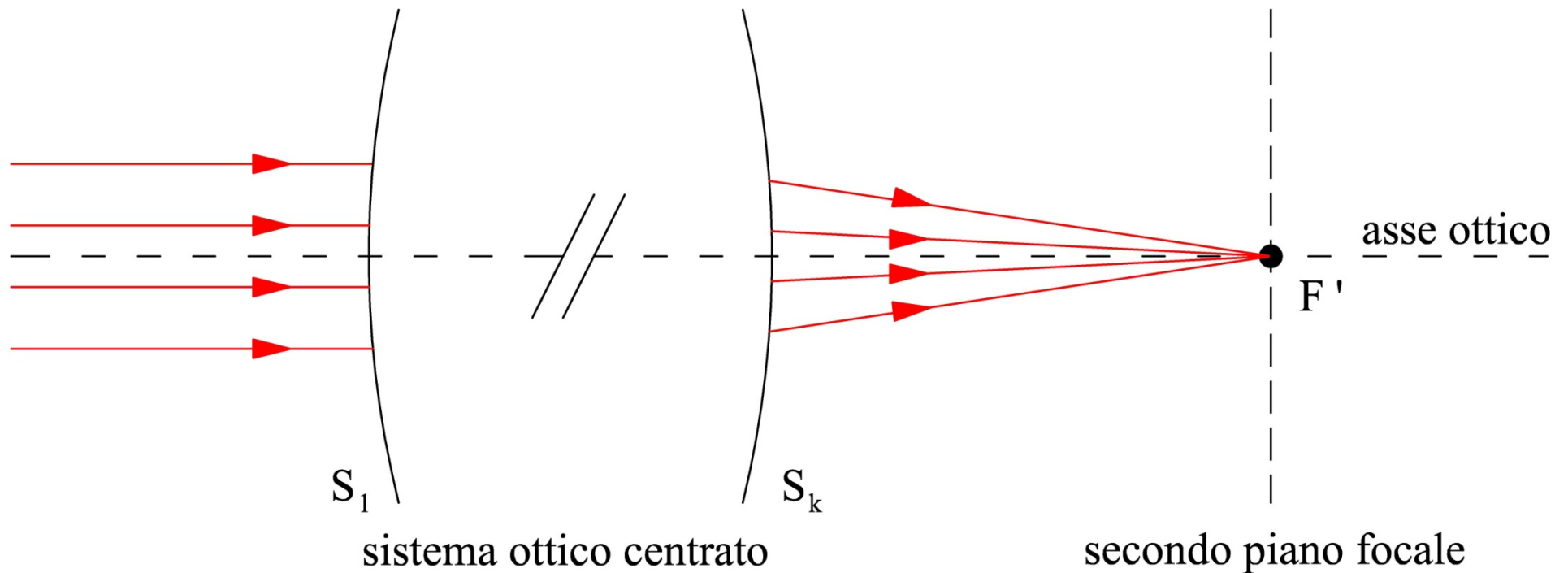


Osservare che in questo caso  $t_0$ , la distanza tra il piano oggetto  $S_0$  ed  $S_1$ , è negativo.

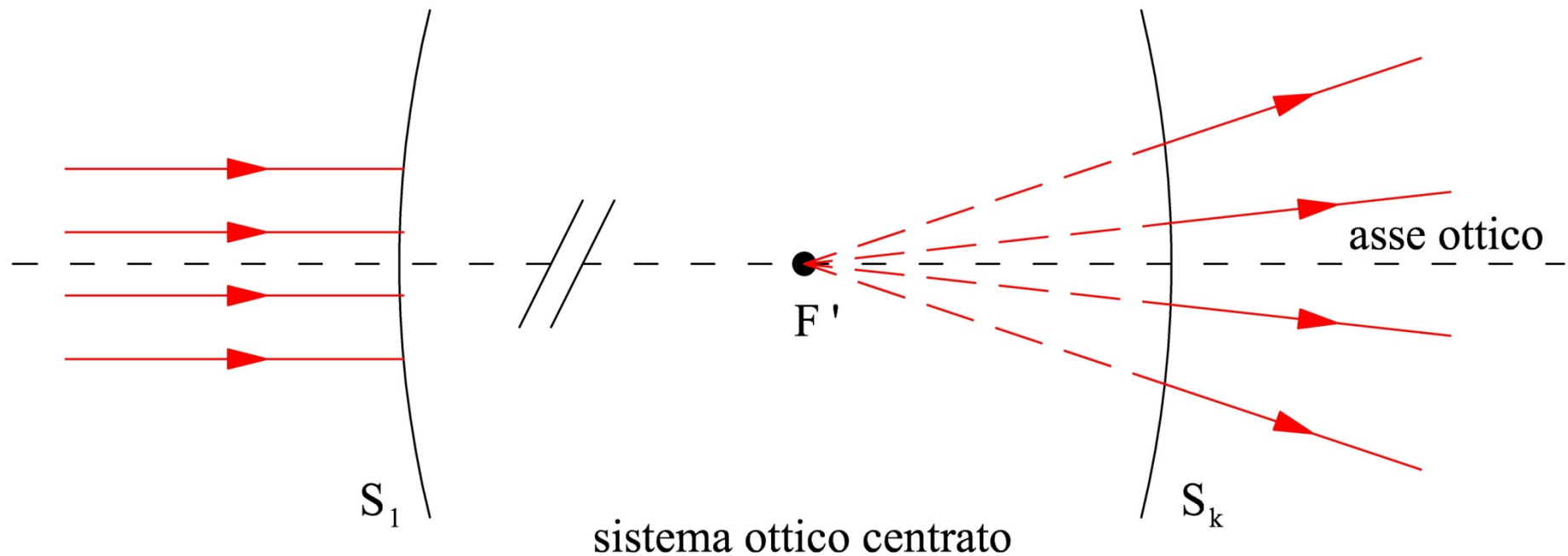
Consideriamo un sistema ottico centrato ed una sorgente puntiforme, di una data lunghezza d'onda, posta sull'asse all'infinito. L'immagine di questa sorgente fatta dal sistema ottico è detta **secondo punto focale** del sistema ottico centrato, per la lunghezza d'onda considerata, e si indica con il simbolo  $F'$ . Il secondo punto focale  $F'$  si trova sull'asse ottico.



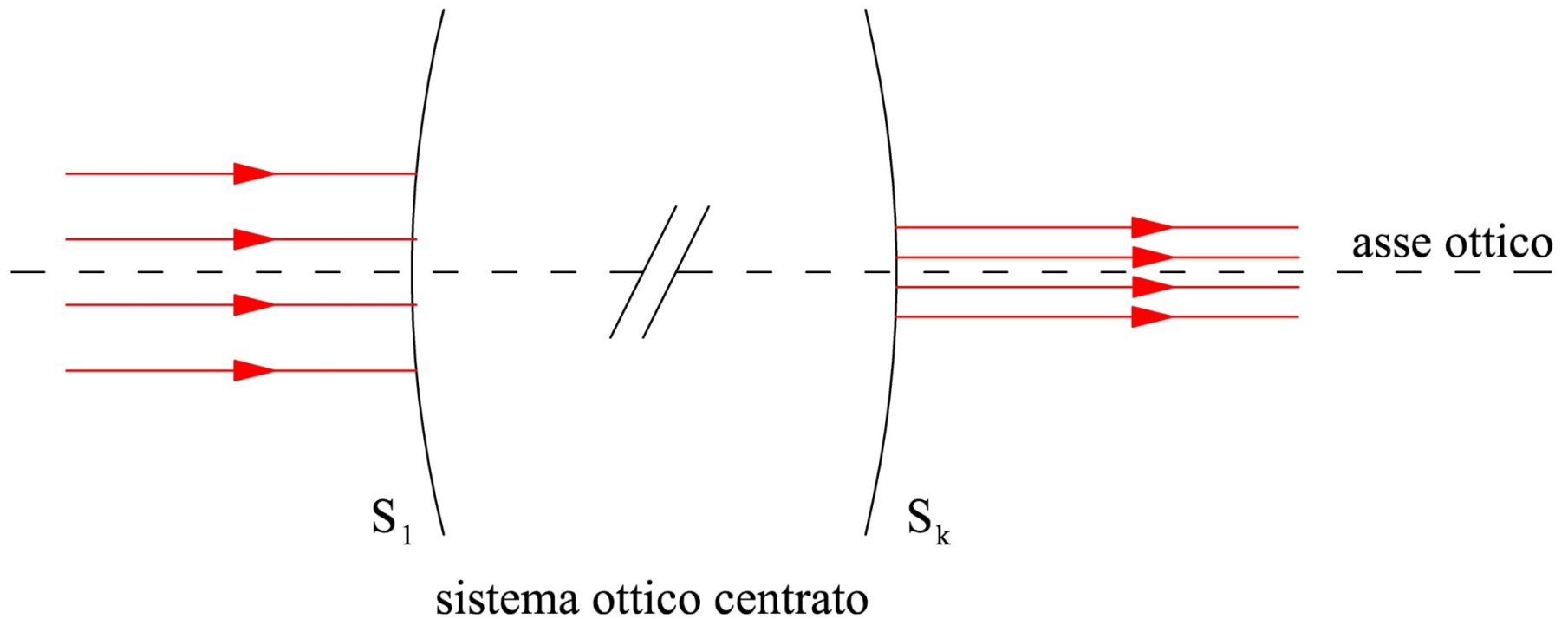
Il piano perpendicolare all'asse ottico e passante per  $F'$  è detto **secondo piano focale** del sistema ottico centrato alla lunghezza d'onda considerata. Esso è il piano immagine coniugato con il piano oggetto all'infinito.



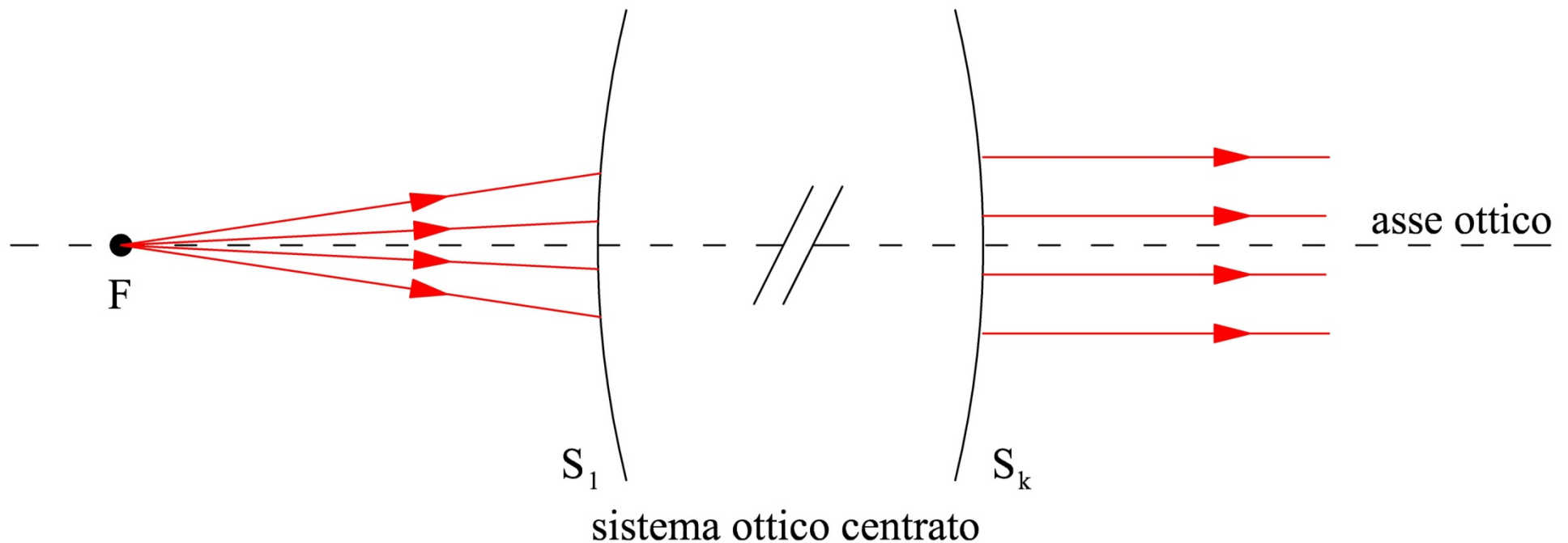
Quando  $F'$  è **reale**, come nella figura precedente, il sistema ottico centrato è detto **convergente**. Analogamente nel caso in cui  $F'$  è **virtuale** il sistema ottico centrato si dice **divergente**.



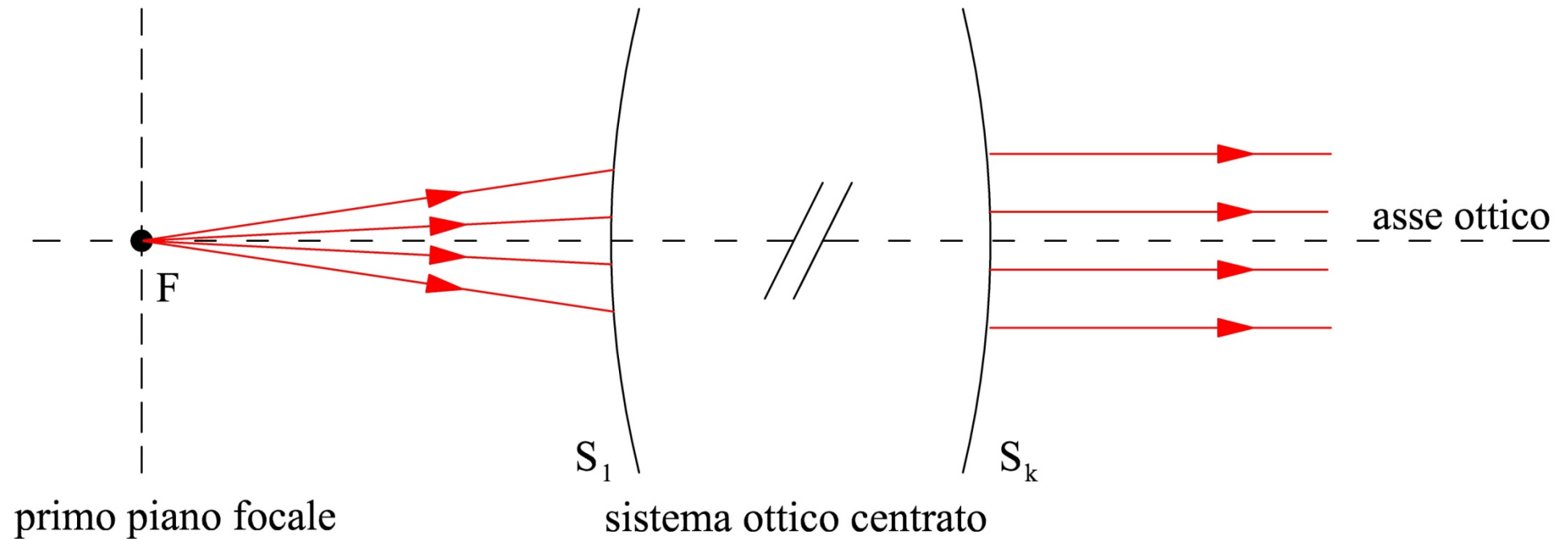
Infine quando **il secondo punto focale  $F'$**  è sull'asse all'infinito il sistema ottico centrato è detto **afocale**.



Il punto, sull'asse di un sistema ottico centrato, dove deve essere posta una sorgente puntiforme di una data lunghezza d'onda affinché la corrispondente immagine sia all'infinito, è detto **primo punto focale F** del sistema ottico centrato per la lunghezza d'onda considerata.

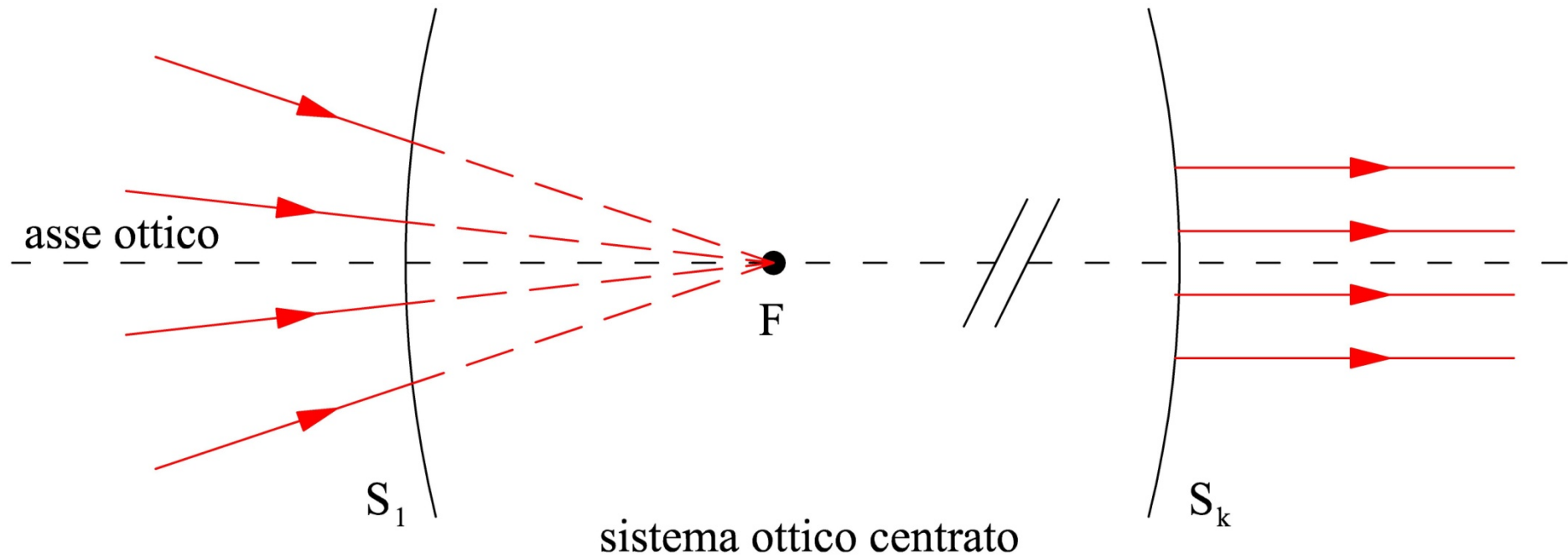


Il piano passante per  $F$  e perpendicolare all'asse ottico è detto **primo piano focale** del sistema ottico centrato alla lunghezza d'onda considerata. Esso è il piano oggetto coniugato con il piano immagine all'infinito.

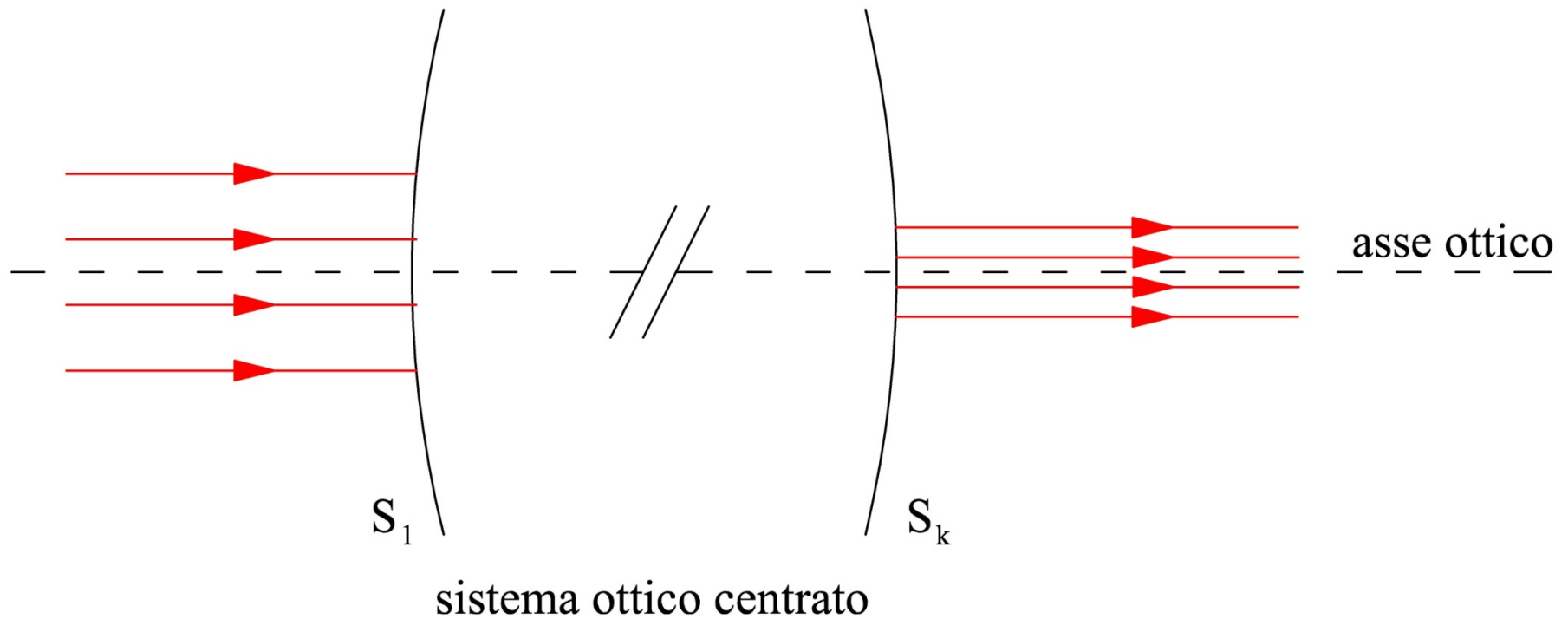




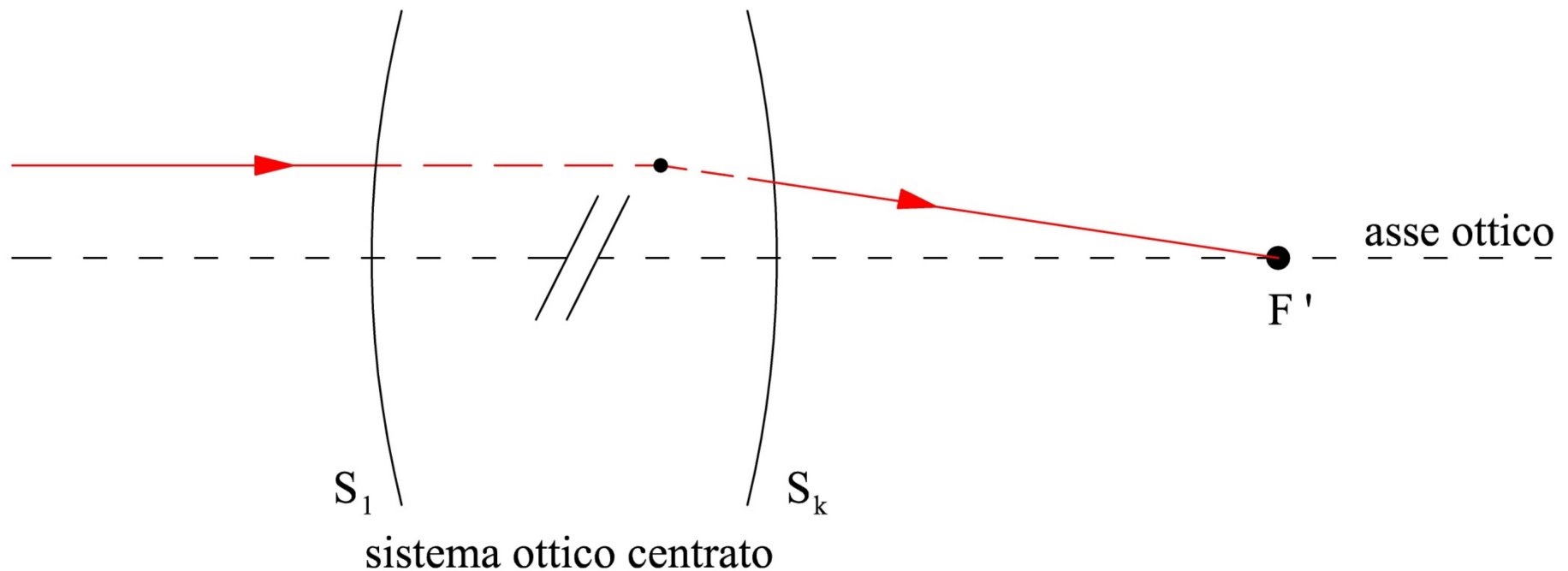
Come per il secondo punto focale anche il **primo punto focale F** può essere **reale**, come mostrato nella precedente figura, o **virtuale**.



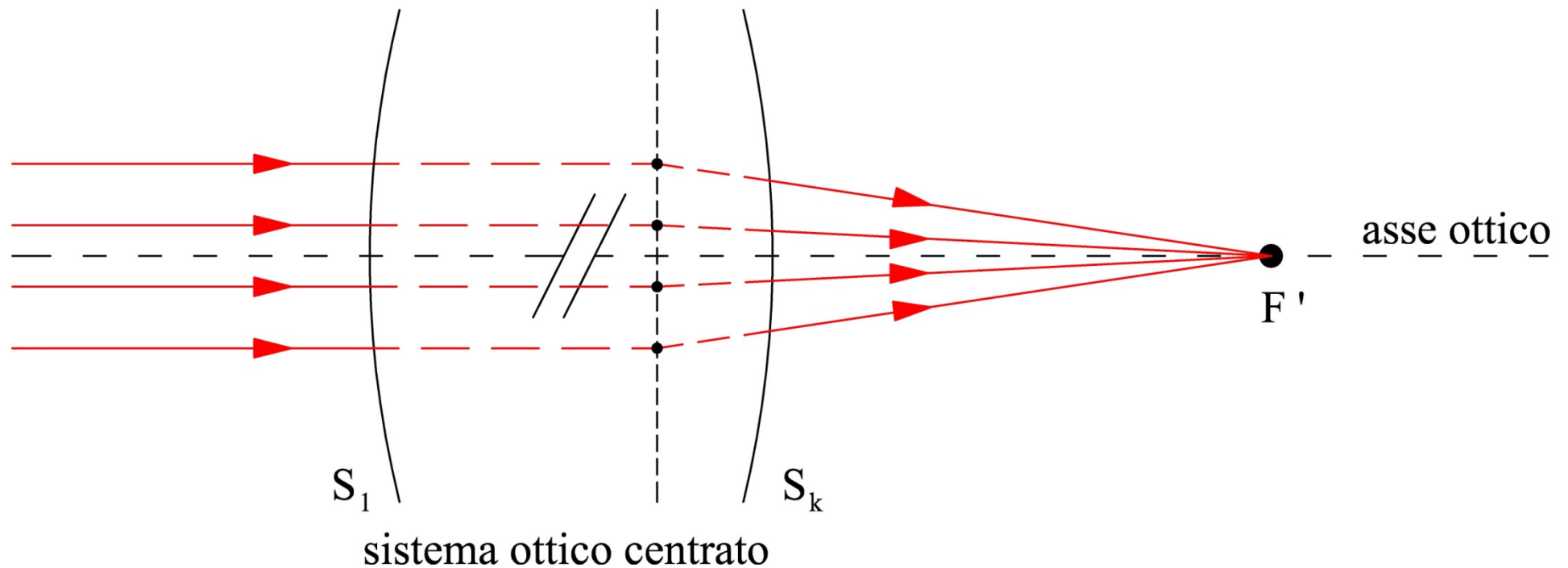
Infine per i sistemi ottici centrati afocali il primo punto focale è anch'esso all'infinito.



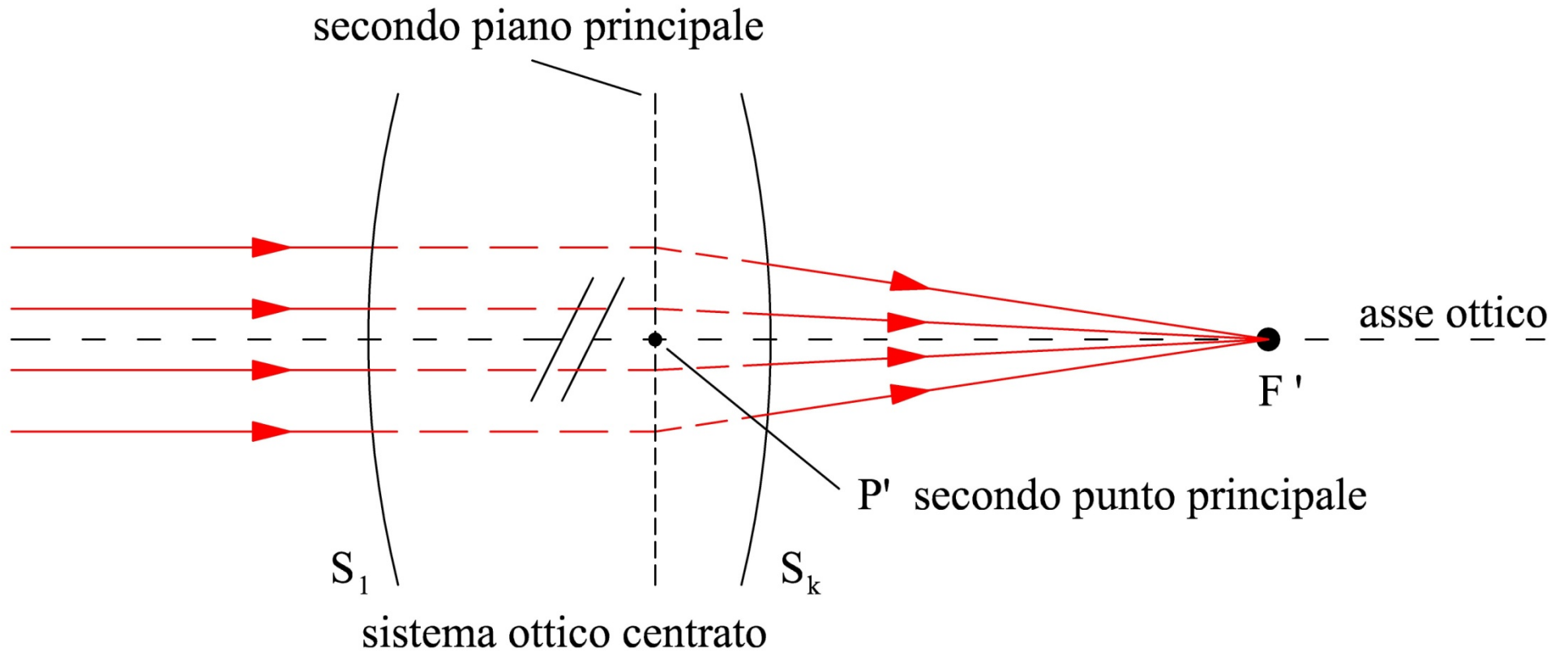
Consideriamo un sistema ottico centrato non afocale ed un raggio parallelo all'asse ottico che incide su  $S_1$ . Consideriamo poi il punto di intersezione tra questo raggio incidente, o il suo prolungamento, ed il corrispondente raggio, o il suo prolungamento, che emergendo da  $S_k$  va ad intersecare l'asse nel secondo punto focale  $F'$ .



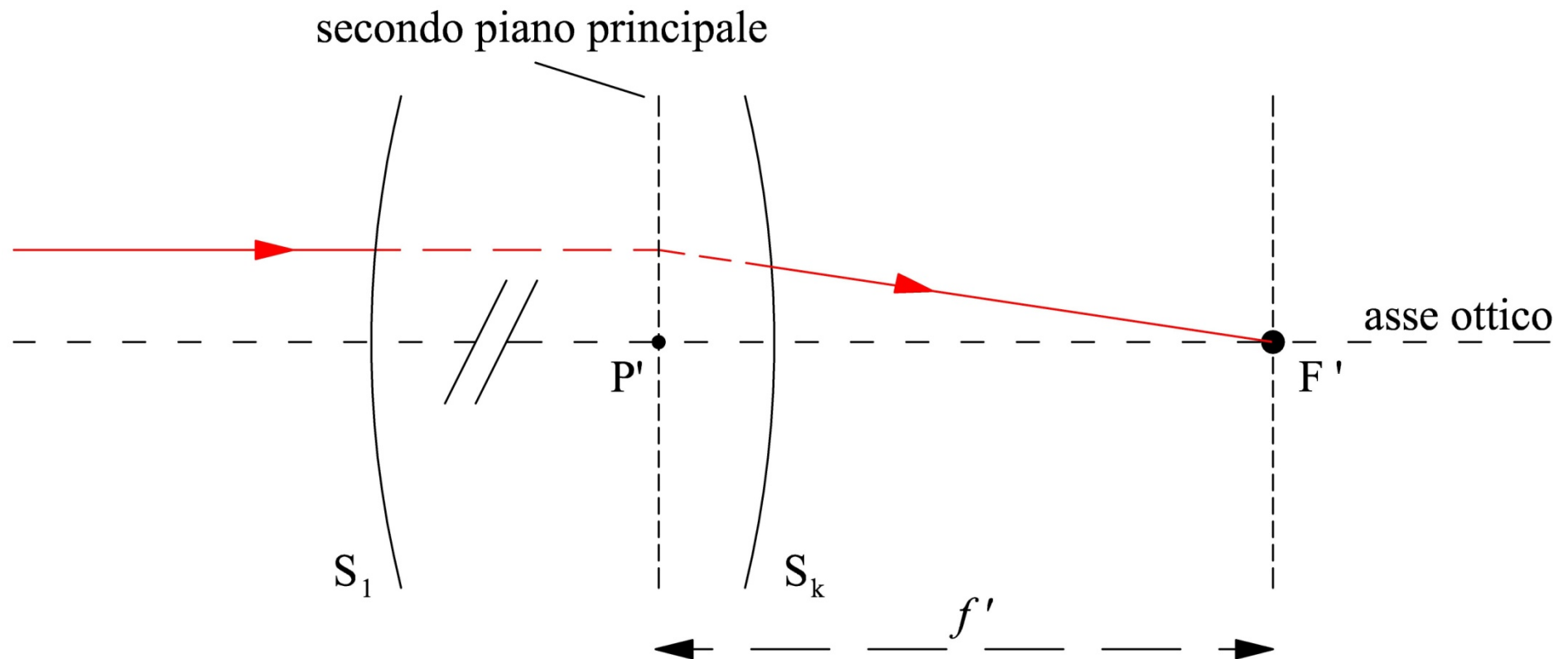
Utilizzando le formule per il tracciamento di un raggio meridiano parassiale è facile verificare che, al variare della distanza dall'asse ottico del raggio incidente, il punto di intersezione descritto precedentemente appartiene sempre ad uno stesso piano perpendicolare all'asse ottico.



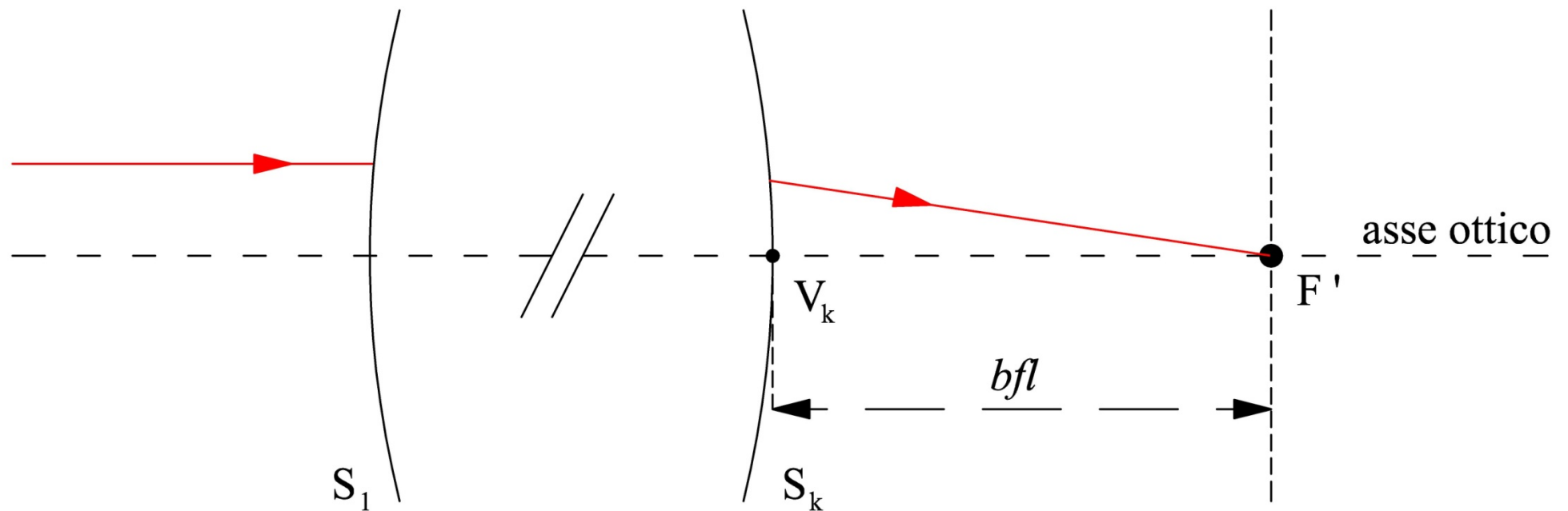
Questo piano è detto **secondo piano principale** del sistema ottico centrato alla lunghezza d'onda considerata. Inoltre, il punto in cui il secondo piano principale interseca l'asse è detto **secondo punto principale** ed è indicato con **P'**.



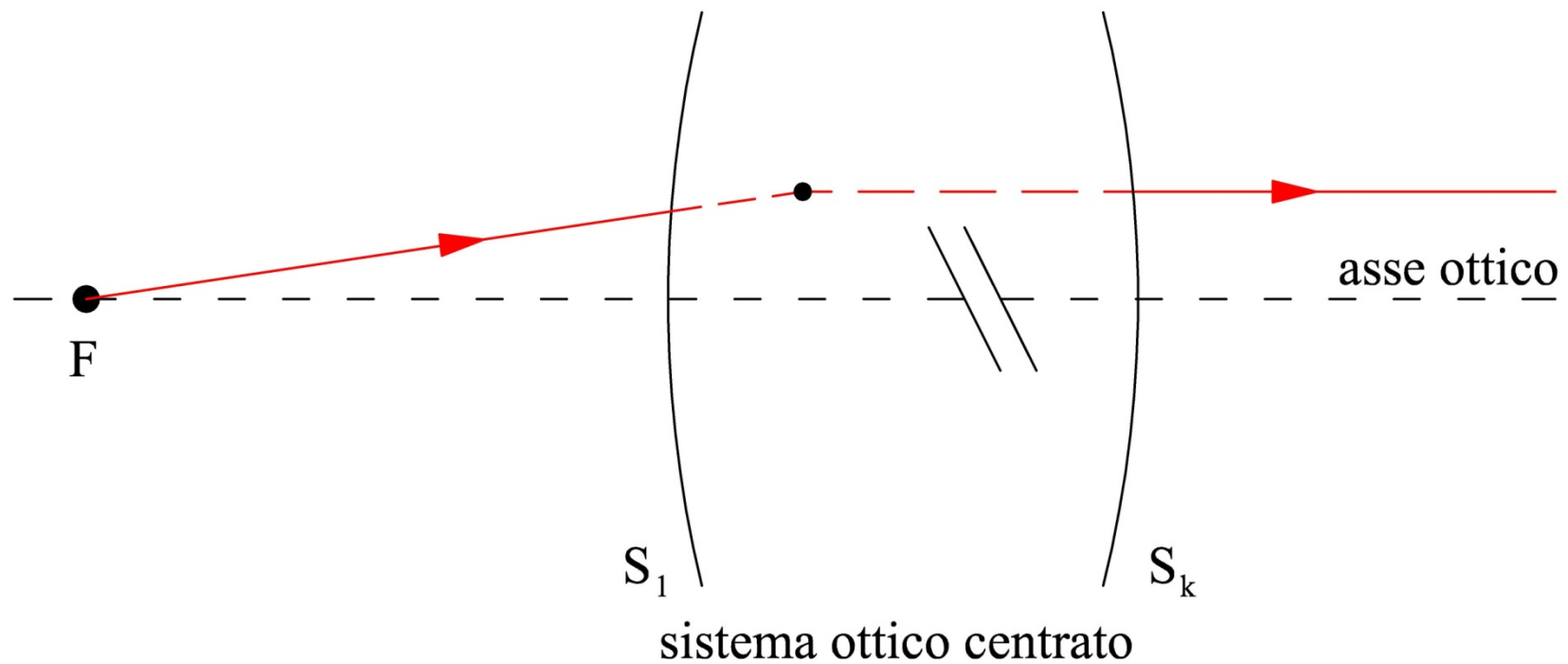
La distanza  $P' F'$ , positiva (negativa) se  $F'$  è situato a destra (sinistra) di  $P'$ , è detta **lunghezza focale effettiva posteriore** o, più semplicemente, **focale** del sistema ottico centrato alla lunghezza d'onda considerata, ed è indicata con il simbolo  $f'$



Indicando con  $V_k$  il vertice dell'ultima superficie  $S_k$  del sistema ottico, la distanza  $V_k F'$ , positiva (negativa) se  $F'$  è situato a destra (sinistra) di  $V_k$ , è detta **lunghezza focale posteriore** del sistema ottico centrato alla lunghezza d'onda considerata ed è indicata con il simbolo ***bfl*** (**back focal length**).

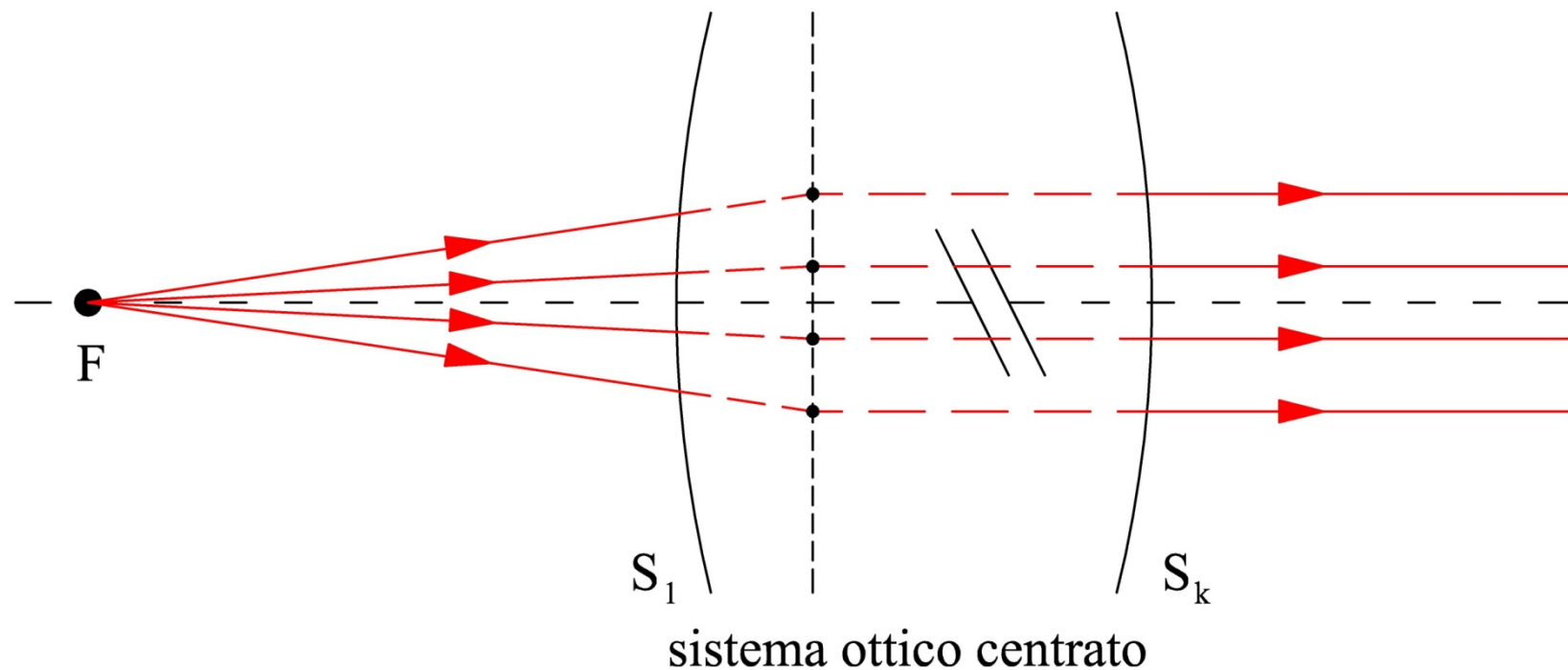


Consideriamo un sistema ottico centrato non afocale ed un raggio, proveniente dal suo primo punto focale  $F$ , che incide su  $S_1$ . Consideriamo poi il punto di intersezione tra questo raggio incidente, o il suo prolungamento, ed il corrispondente raggio, o il suo prolungamento, che emerge da  $S_k$  parallelo all'asse ottico.

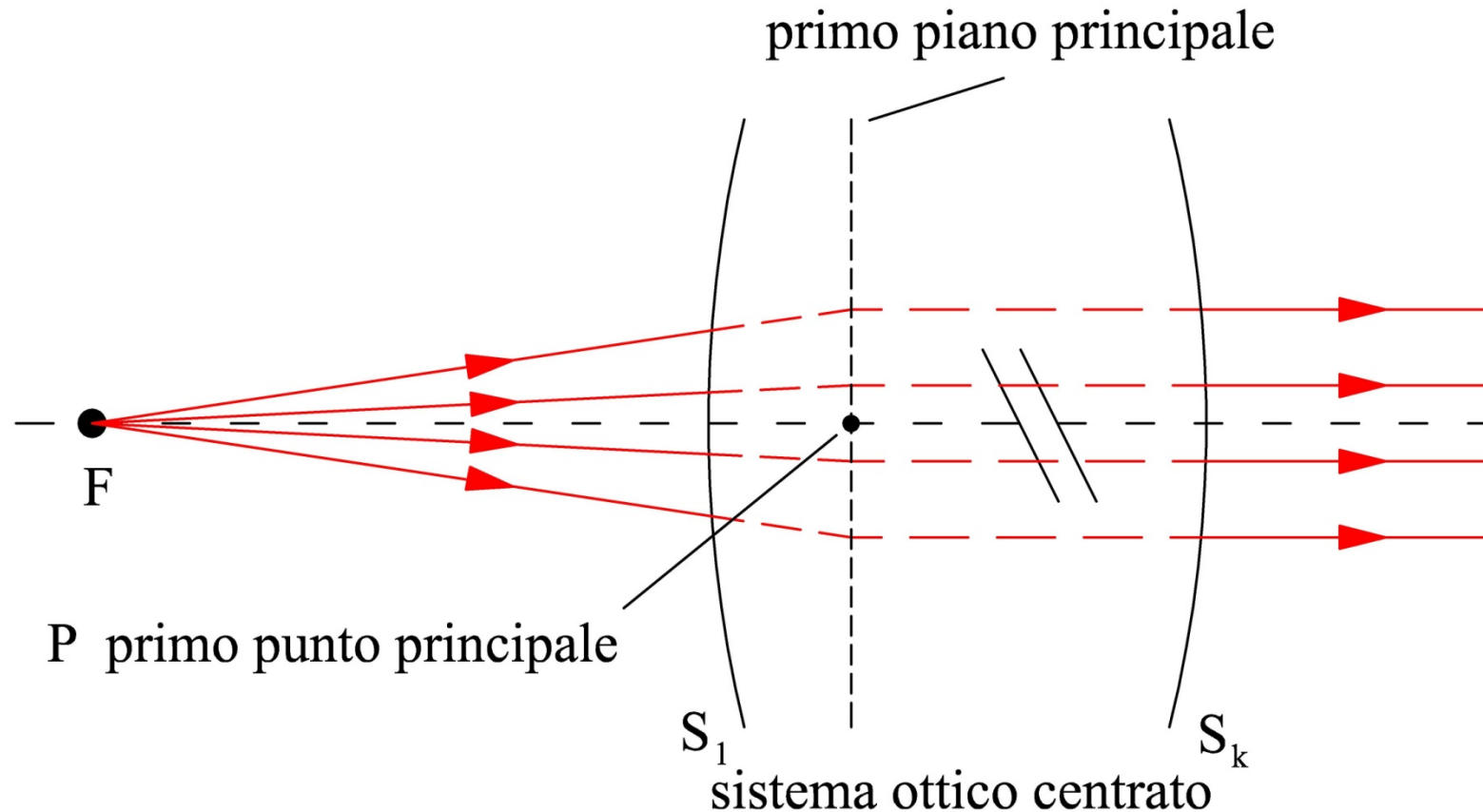




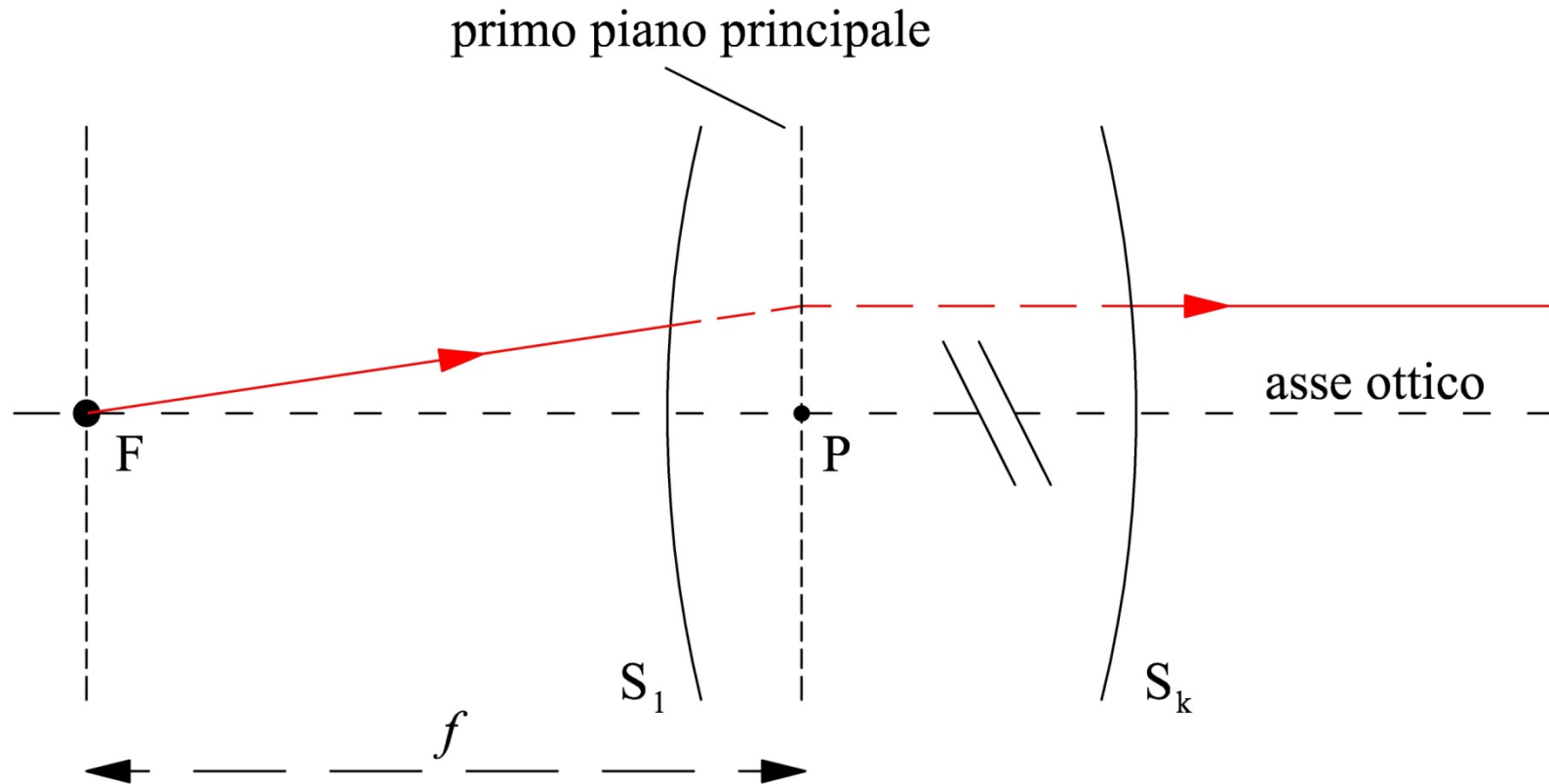
Utilizzando le formule per il tracciamento di un raggio meridiano parassiale è facile verificare che, al variare dell'altezza su  $S_1$  del raggio incidente, il punto di intersezione descritto precedentemente appartiene sempre ad uno stesso piano perpendicolare all'asse ottico.



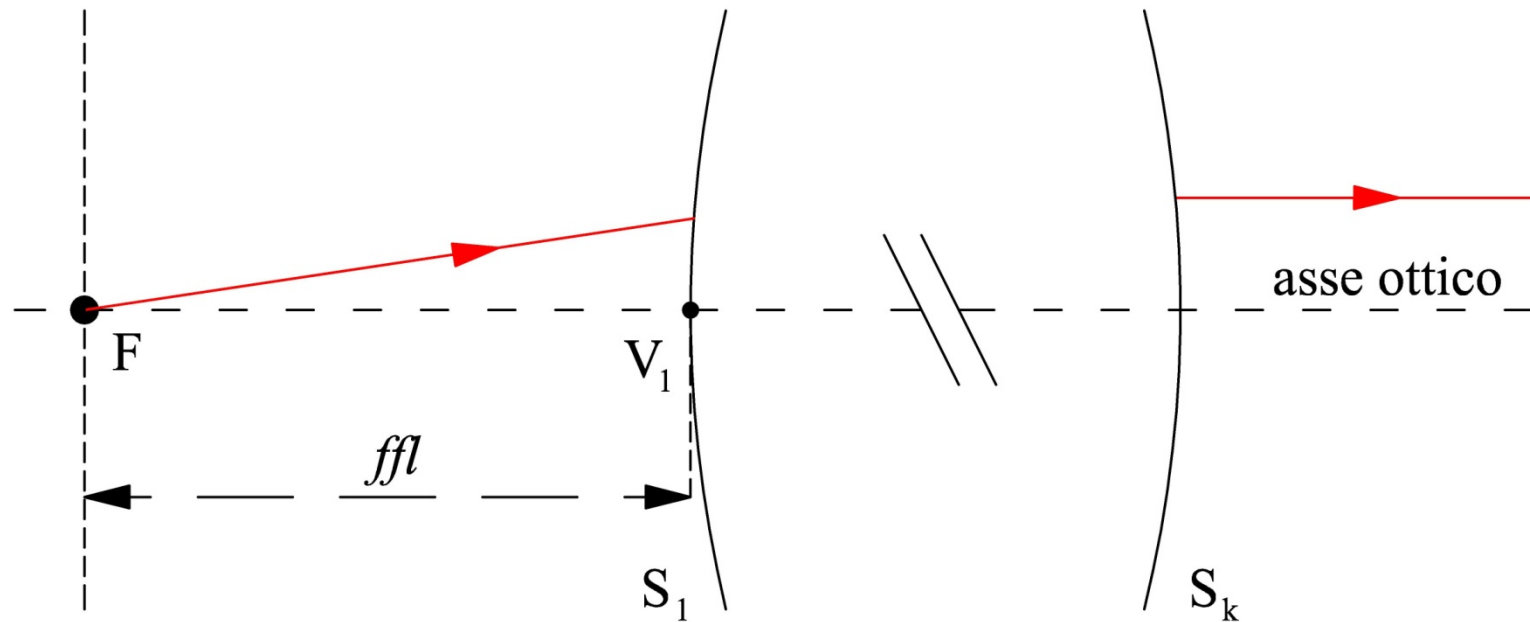
Questo piano è detto **primo piano principale** del sistema ottico centrato alla lunghezza d'onda considerata. Inoltre, il punto in cui il primo piano principale interseca l'asse è detto **primo punto principale** ed è indicato con **P**.



La distanza  $PF$ , positiva (negativa) se  $F$  è situato a destra (sinistra) di  $P$ , è detta **lunghezza focale effettiva anteriore** del sistema ottico centrato alla lunghezza d'onda considerata, ed è indicata con il simbolo  $f$ .



Indicando con  $V_1$  il vertice della prima superficie  $S_1$  del sistema ottico, la distanza  $V_1F$ , positiva (negativa) se  $F$  è situato a destra (sinistra) di  $V_1$ , è detta **lunghezza focale anteriore** del sistema ottico centrato alla lunghezza d'onda considerata ed è indicata con il simbolo ***ffl*** (**front focal length**).

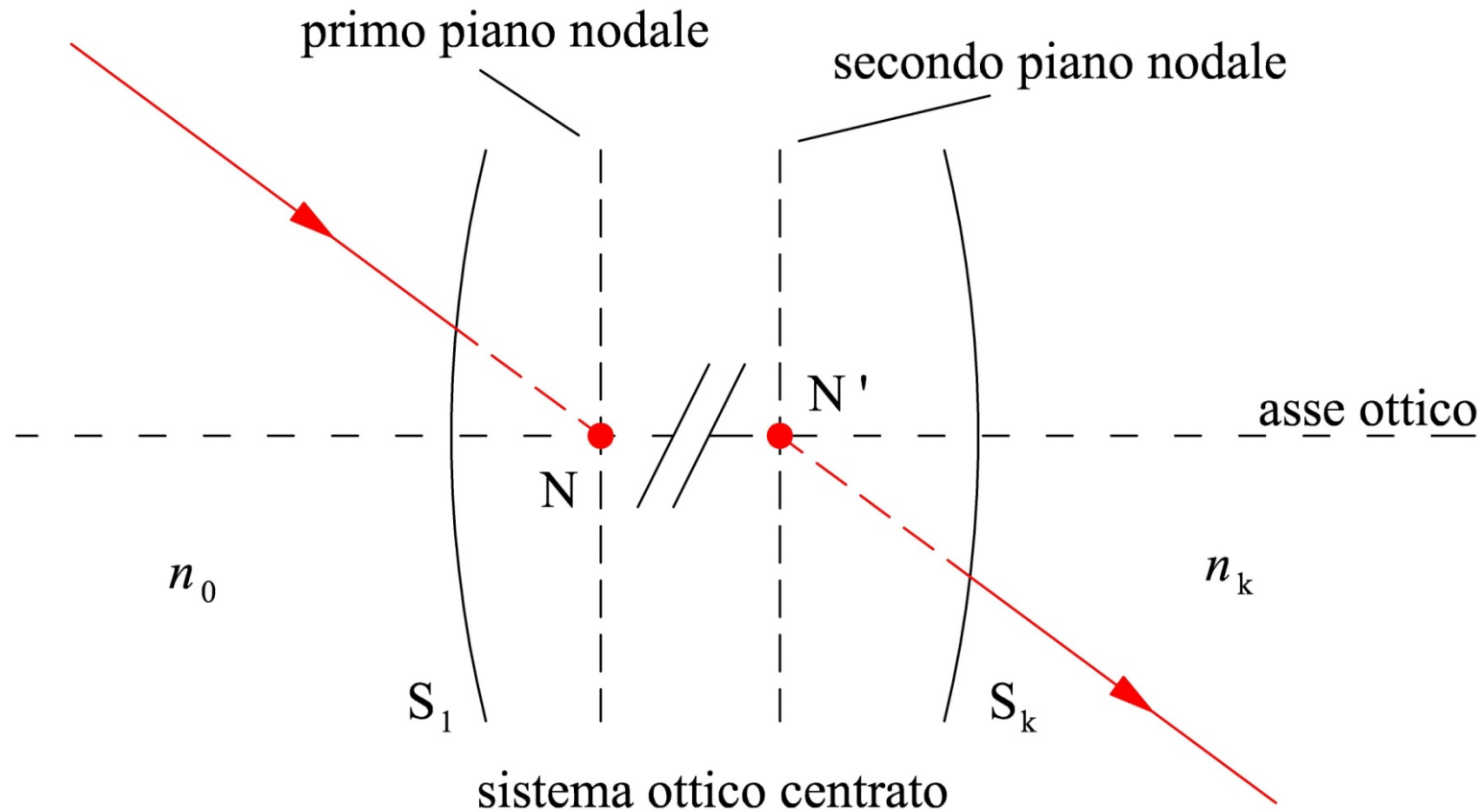


Utilizzando le formule per il tracciamento di un raggio meridiano parassiale si può mostrare che la lunghezza focale effettiva posteriore ed anteriore soddisfano la seguente relazione:

$$\frac{f}{n_0} = - \frac{f'}{n_k}$$

Da questa relazione si osserva che, quando l'indice di rifrazione del mezzo dove è posto l'oggetto è uguale all'indice di rifrazione del mezzo dove è posto il piano immagine, come accade ad esempio quando un obiettivo fotografico è utilizzato in aria, le due lunghezze focali effettive sono uguali in valore assoluto.

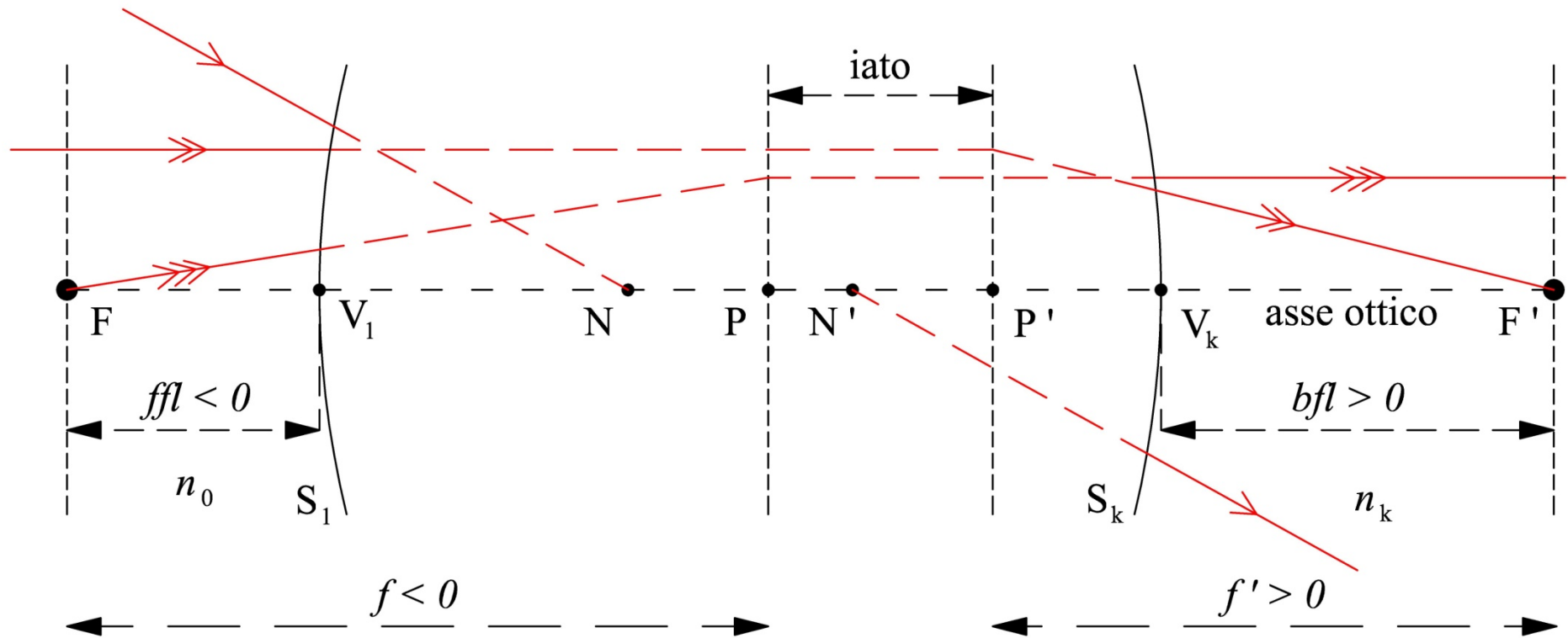
Il **primo punto nodale N** ed il **secondo punto nodale N'** di un sistema ottico centrato non afocale per una data lunghezza d'onda sono due punti situati sull'asse ottico che godono della proprietà illustrata in figura.



Quando un raggio, a cui è associata la lunghezza d'onda considerata, incide su  $S_1$  passando (esso od il suo prolungamento) per  $N$  il corrispondente raggio che emerge da  $S_k$  passa (esso od il suo prolungamento) per  $N'$  ed è **parallelo** al raggio incidente su  $S_1$ .

I piani perpendicolari all'asse ottico e passanti per  $N$  ed  $N'$  sono detti rispettivamente **primo piano nodale** e **secondo piano nodale**.

Nella figura che segue vengono sintetizzate tutte le caratteristiche parassiali di un sistema ottico centrato non afocale, che sono state definite separatamente nelle precedenti pagine.



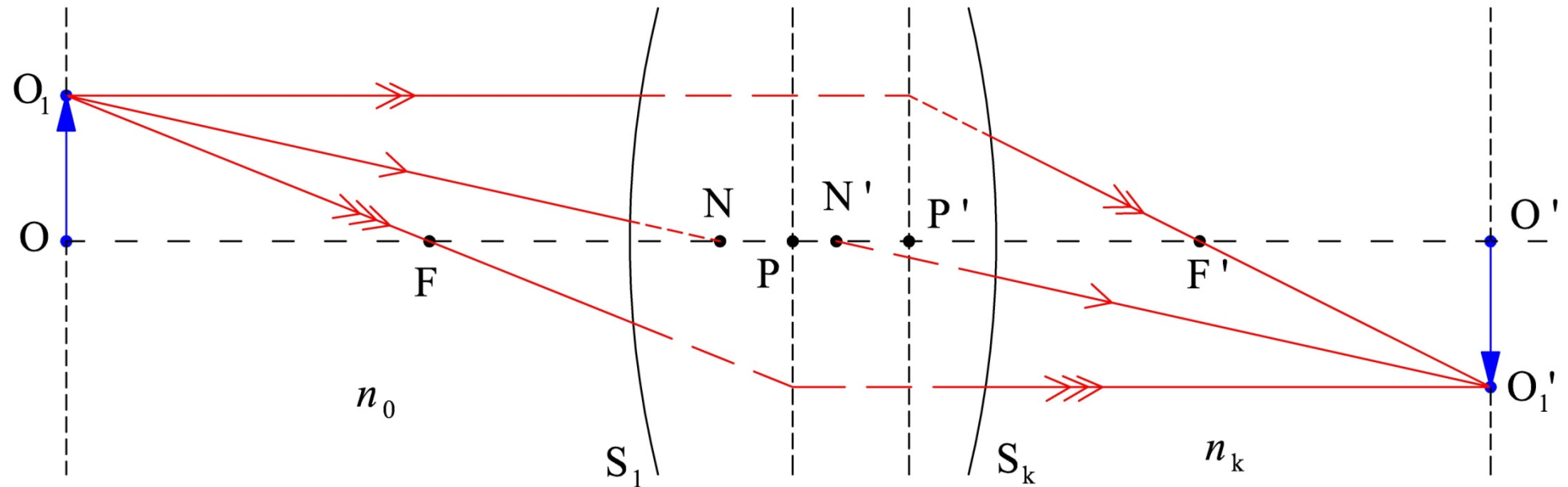
Come è indicato nella figura, la distanza tra i due piani principali è detta **iato** (**hiatus**). Osservare inoltre che per motivi di leggibilità della figura i due piani nodali non sono stati riportati nel disegno.



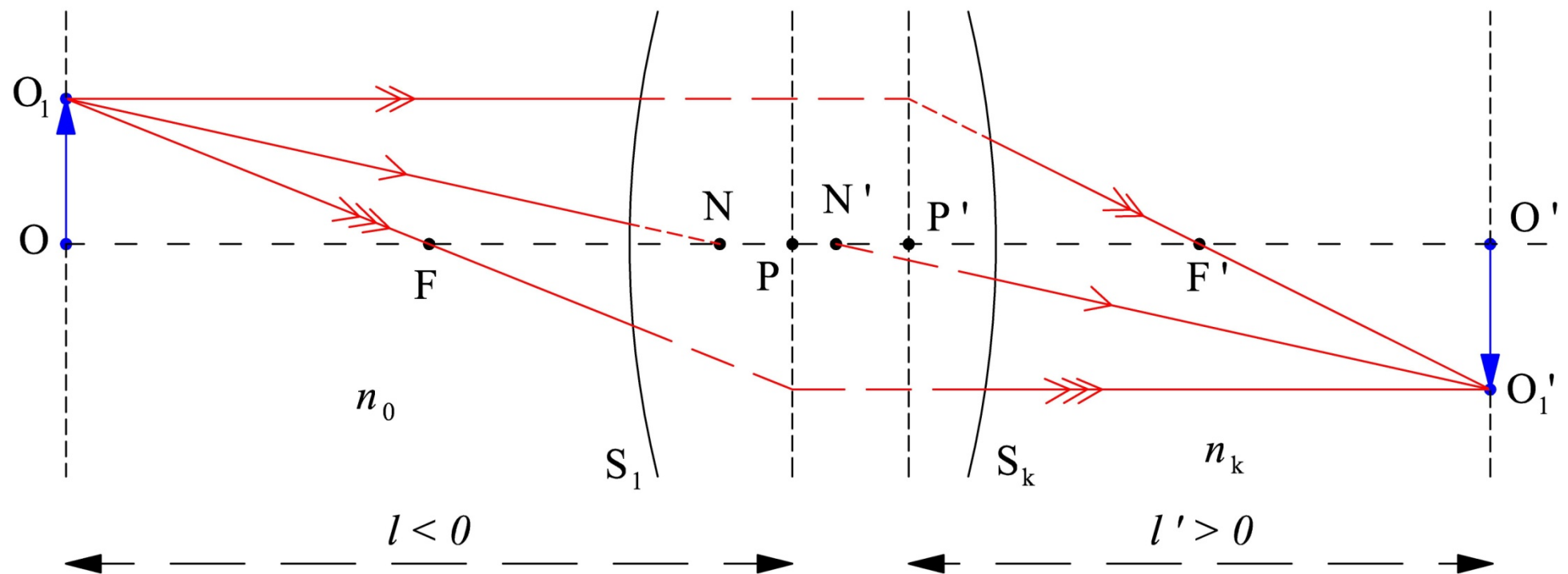
I due punti principali insieme ai due punti focali ed ai due punti nodali costituiscono **i sei punti cardinali** di un sistema ottico centrato non afocale in condizioni parassiali. L'aggettivo "cardinali" sta ad evidenziare la importanza che hanno questi punti per un sistema ottico centrato. Infatti, la conoscenza della posizione di questi punti rispetto alle superfici del sistema ottico permette di determinare facilmente tutte le sue proprietà di *imaging* in condizioni parassiali.

Per mostrare questa proprietà, consideriamo il sistema ottico centrato  $S_1 \dots S_k$  rappresentato nella figura seguente e determiniamo la posizione e la dimensione dell'immagine, fatta in condizioni parassiali e per una data lunghezza d'onda  $\lambda$ , di un oggetto  $O$   $O_1$  a distanza finita. Supponiamo di conoscere per la lunghezza d'onda considerata la posizione dei sei punti cardinali del sistema ottico rispetto alle superfici che lo costituiscono. Usando la definizione dei piani principali e dei punti nodali è facile

tracciare, a partire da  $O_1$ , il raggio parallelo all'asse, il raggio passante per il primo punto focale ed il raggio raggio passante per il primo punto nodale. L'immagine  $O_1'$  di  $O_1$  coincide con il punto di intersezione comune di questi tre raggi emergenti da  $S_k$ . Dalla conoscenza di  $O_1'$  si risale immediatamente alla posizione del piano immagine ed alla dimensione dell'immagine  $O' O_1'$ .

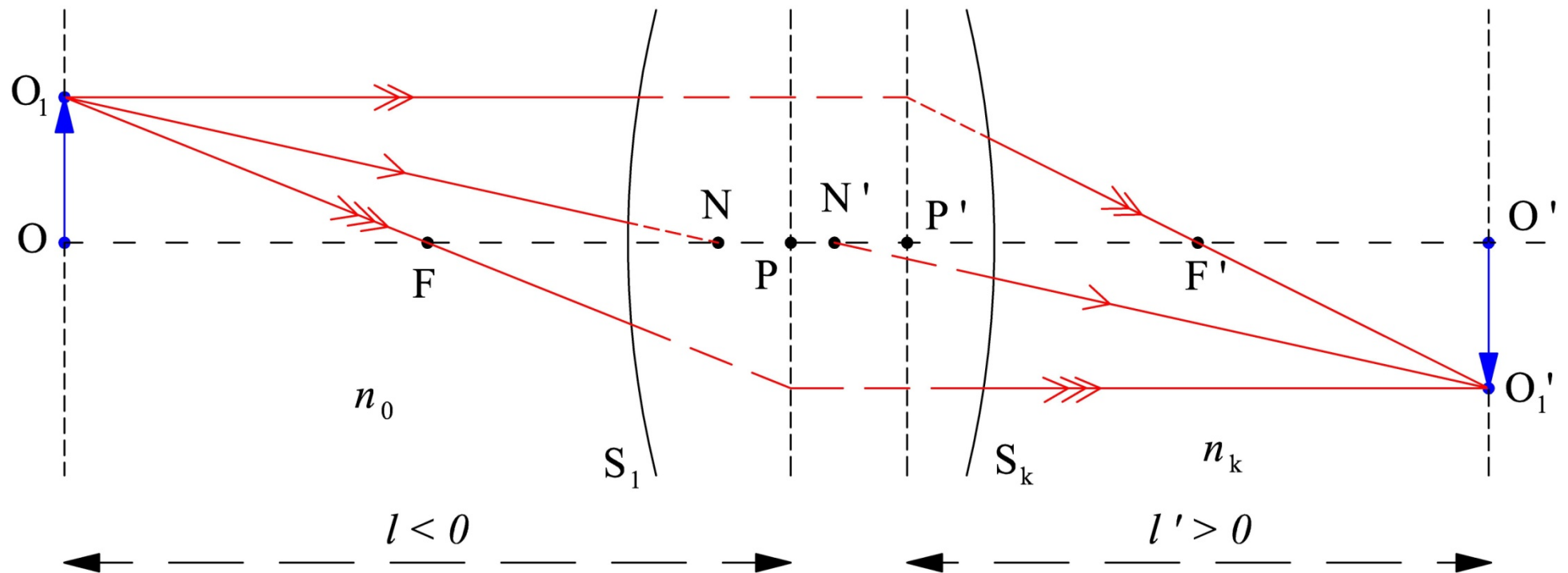


Indichiamo con  $l$  la distanza tra il piano oggetto ed il primo piano principale, con  $l$  positivo (negativo) se il piano oggetto si trova a destra (sinistra) del primo piano principale, e con  $l'$  la distanza tra il piano immagine ed il secondo piano principale, con  $l'$  positivo (negativo) se il piano immagine si trova a destra (sinistra) del secondo piano principale.



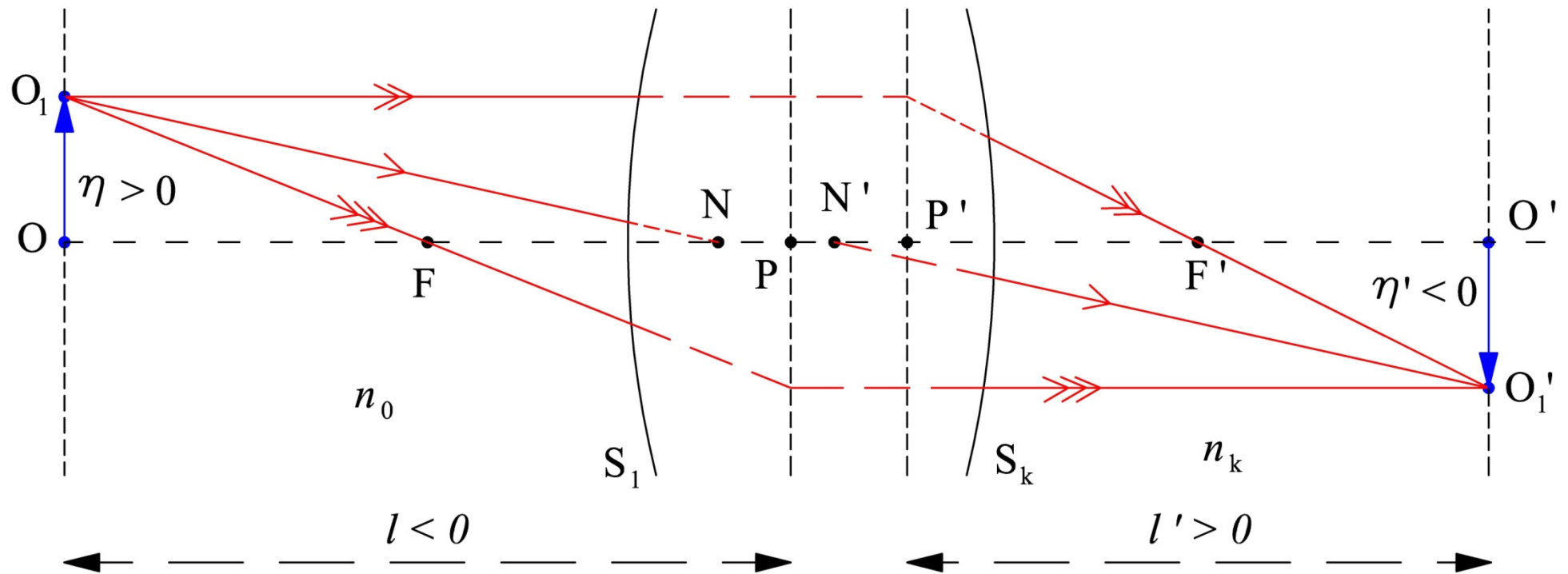
Si può dimostrare che traducendo in formule la costruzione precedente si ottiene **la legge di coniugazione**:

$$\frac{n_k}{l'} = \frac{n_0}{l} + \frac{n_k}{f'}$$



Inoltre, indicando con  $m$  l'**ingrandimento** associato alla coppia di piani coniugati, si può mostrare che la costruzione precedente implica anche che:

$$m = \frac{\eta'}{\eta} = \frac{n_0 l'}{n_k l}$$



L'ingrandimento  $m$ , detto anche **ingrandimento trasversale**, è una grandezza algebrica. Il suo valore assoluto fornisce il fattore di scala associato alla coppia di piani coniugati, ed il suo segno contiene informazioni sull'orientazione dell'immagine:  $m > 0$  significa che l'immagine ha la stessa orientazione dell'oggetto mentre  $m < 0$  significa che l'immagine è ruotata di  $180^\circ$  (capovolta) rispetto all'oggetto.

$$\frac{n_k}{l'} = \frac{n_0}{l} + \frac{n_k}{f'}$$

$$m = \frac{\eta'}{\eta} = \frac{n_0 l'}{n_k l}$$

Osservando la legge della coniugazione e l'equazione dell'ingrandimento si capisce che è possibile determinare  $l'$  ed  $m$  conoscendo  $l$  ed  $f'$ . Inoltre si può osservare che queste due equazioni possono essere risolte rispetto a  $l$  ed a  $l'$  ottenendo le seguenti due espressioni:

$$l = \frac{n_0}{n_k} \frac{1 - m}{m} f'$$

$$l' = (1 - m) f'$$

che permettono di determinare  $l$  ed  $l'$  dalla conoscenza della focale del sistema ottico centrato e dell'ingrandimento associato alla coppia di piani coniugati. Da queste ultime due espressioni discende allora la seguente proprietà:

Un sistema ottico centrato non afocale in condizioni parassiali e per una data lunghezza d'onda ammette una ed una sola coppia di piani coniugati alla quale corrisponde un dato valore dell'ingrandimento.

$$l = \frac{n_0}{n_k} \frac{1 - m}{m} f'$$

$$l' = (1 - m) f'$$

È facile verificare che:

$$m = 1 \implies l = 0 \text{ e } l' = 0$$

ma

$$l = 0 \implies \text{piano oggetto} \equiv \text{primo piano principale}$$

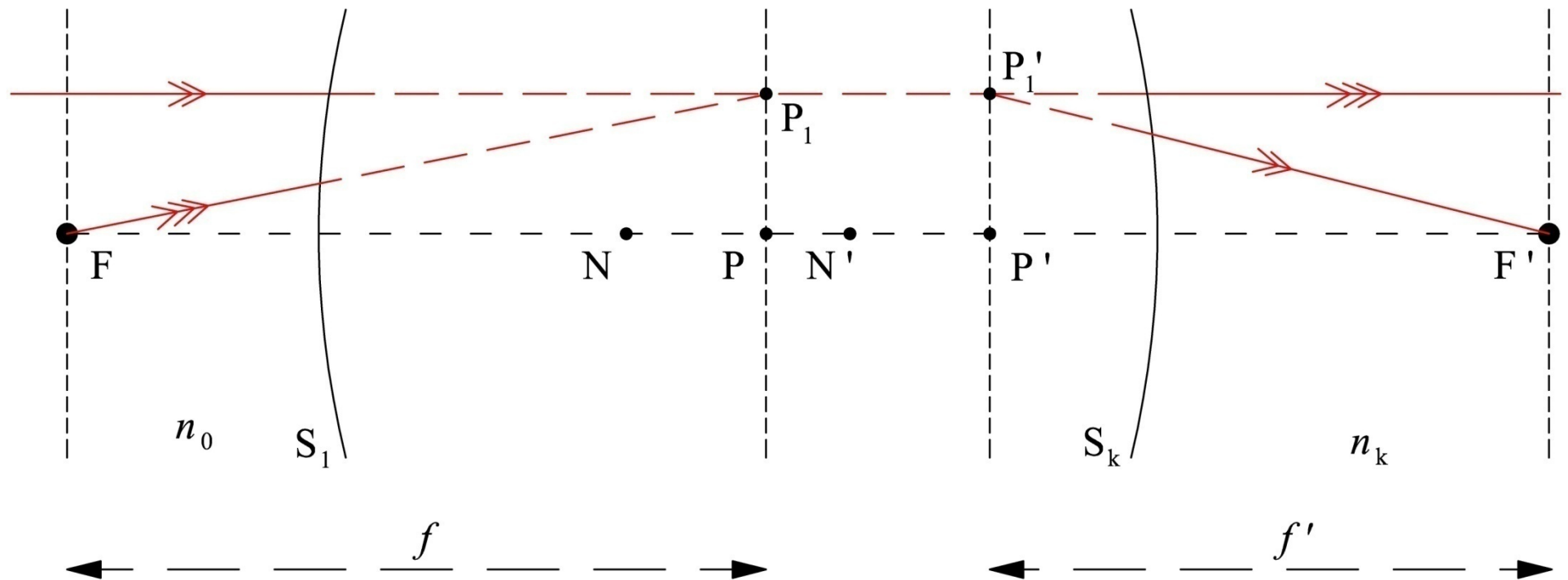
$$l' = 0 \implies \text{piano immagine} \equiv \text{secondo piano principale}$$

quindi abbiamo dimostrato la seguente proprietà:

i piani principali di un sistema ottico centrato sono piani coniugati con ingrandimento unitario



In figura è mostrato come al punto oggetto virtuale  $P_1$ , appartenente al primo piano principale, corrisponde il punto immagine virtuale  $P_1'$  che appartiene al secondo piano principale. Inoltre si può osservare che  $P_1$  e  $P_1'$  si trovano alla stessa distanza dall'asse ottico.



Si può dimostrare che anche i **piani nodali** sono **piani coniugati** con ingrandimento  $m_{N-N'}$  dato da:

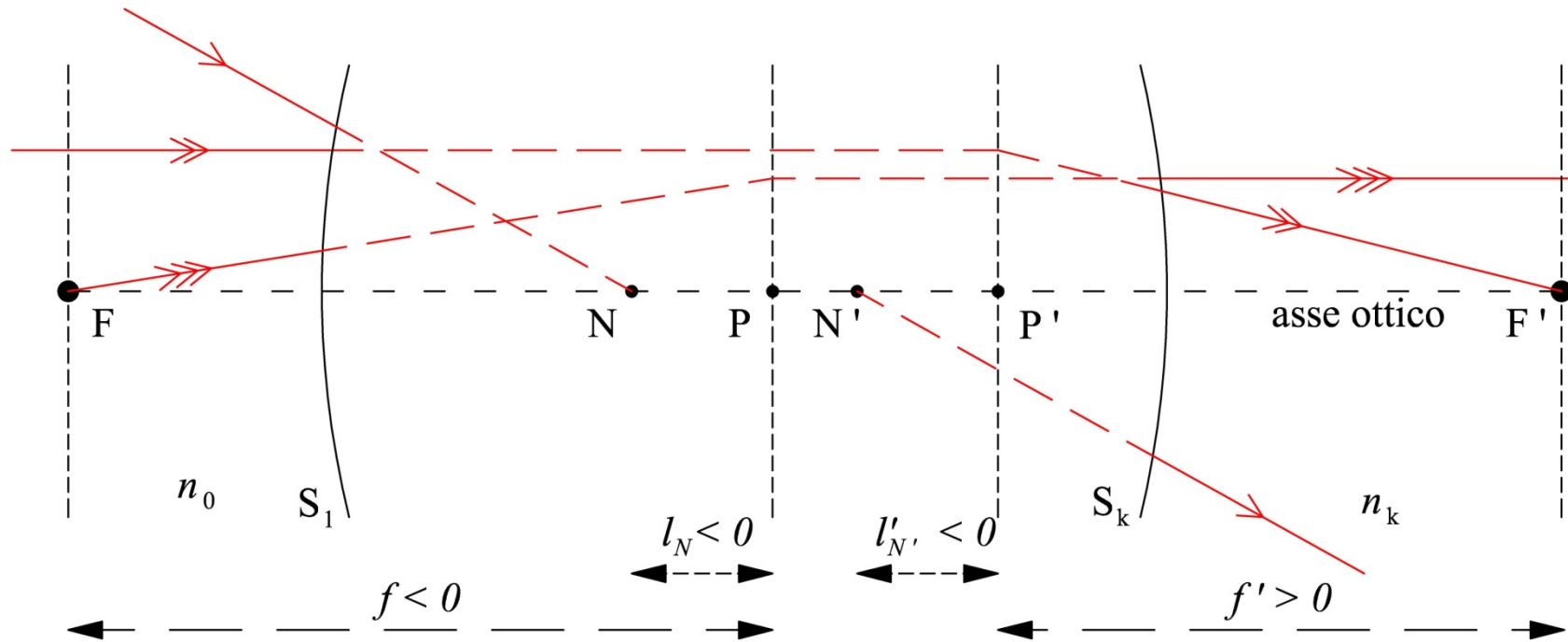
$$m_{N-N'} = \frac{n_0}{n_k}$$

Sostituendo questo valore dell'ingrandimento nelle ultime due espressioni riportate sopra abbiamo che:

$$l_N = l'_{N'} = \left(1 - \frac{n_0}{n_k}\right) f'$$

Ovvero i punti nodali distano della stessa quantità dai corrispondenti punti principali e sono localizzati tutti e due alla sinistra o alla destra del corrispondente punto principale.

Inoltre se assegnamo la posizione dei punti nodali rispetto ai corrispondenti punti focali otteniamo:



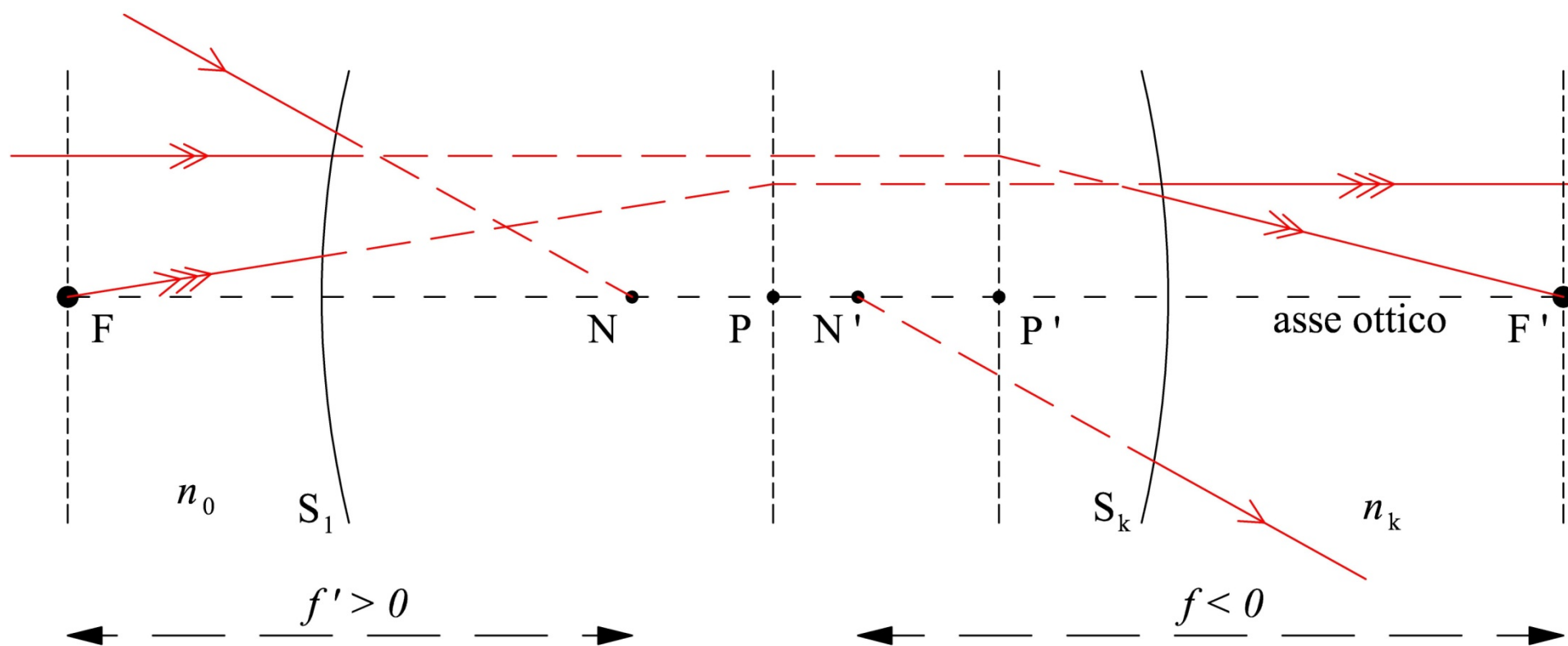
$$FN = -f + l_N = \frac{n_0}{n_k} f' + \left(1 - \frac{n_0}{n_k}\right) f'$$

$$F'N' = -f' + l'_{N'} = -f' + \left(1 - \frac{n_0}{n_k}\right) f' = -\frac{n_0}{n_k} f'$$

Da cui si ottiene:

$$FN = f'$$

$$F'N' = f$$



Da quanto detto sopra è facile osservare che quando **l'indice di rifrazione del mezzo contenente l'oggetto è uguale a quello del mezzo contenente il piano immagine i punti nodali coincidono con i rispettivi punti principali.**

Inoltre si osserva che la posizione dei punti nodali è determinabile in funzione della posizione dei punti focali e dei punti principali.

### ATTENZIONE

Mentre i due piani principali ed i due piani nodali sono tra loro coniugati, **i due piani focali non sono tra loro coniugati.** Infatti il primo piano focale è coniugato con il piano immagine all'infinito, ed il piano oggetto all'infinito è coniugato con il secondo piano focale.

Quando il **piano oggetto è all'infinito** la legge di coniugazione, precedentemente espressa, ci ribadisce che il piano immagine coincide con il secondo piano focale.

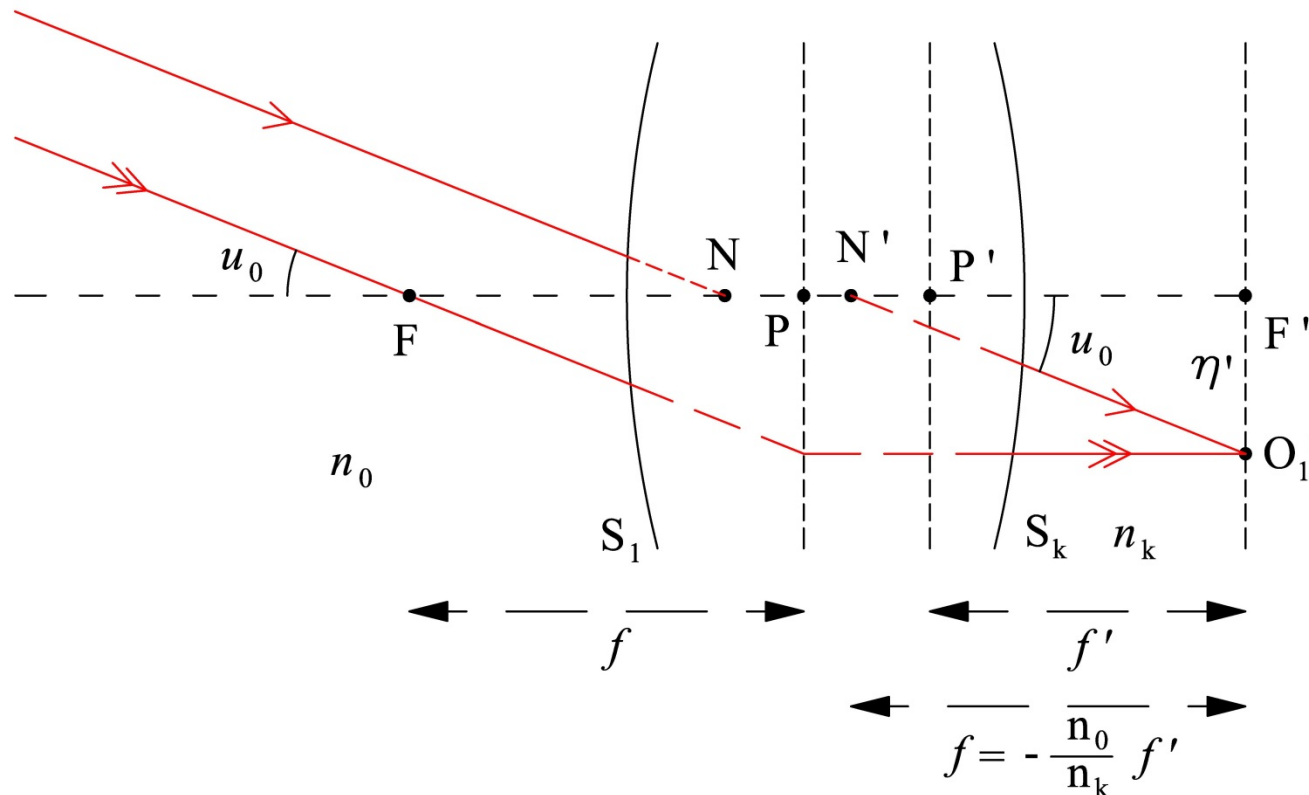
L'equazione dell'ingrandimento inoltre ci evidenzia che  $m = 0$ , ovvero **l'immagine di un oggetto di dimensione finita posto sull'asse del sistema ottico è nulla** ( $\eta' = 0 \cdot \eta = 0$ ) e coincide con il secondo punto focale.

Quando invece la dimensione dell'oggetto è anch'essa **infinita** ( $\eta = \infty$ ) l'equazione dell'ingrandimento non è più applicabile in quanto si riduce alla seguente forma indeterminata  $\eta' = 0 \cdot \infty$ .

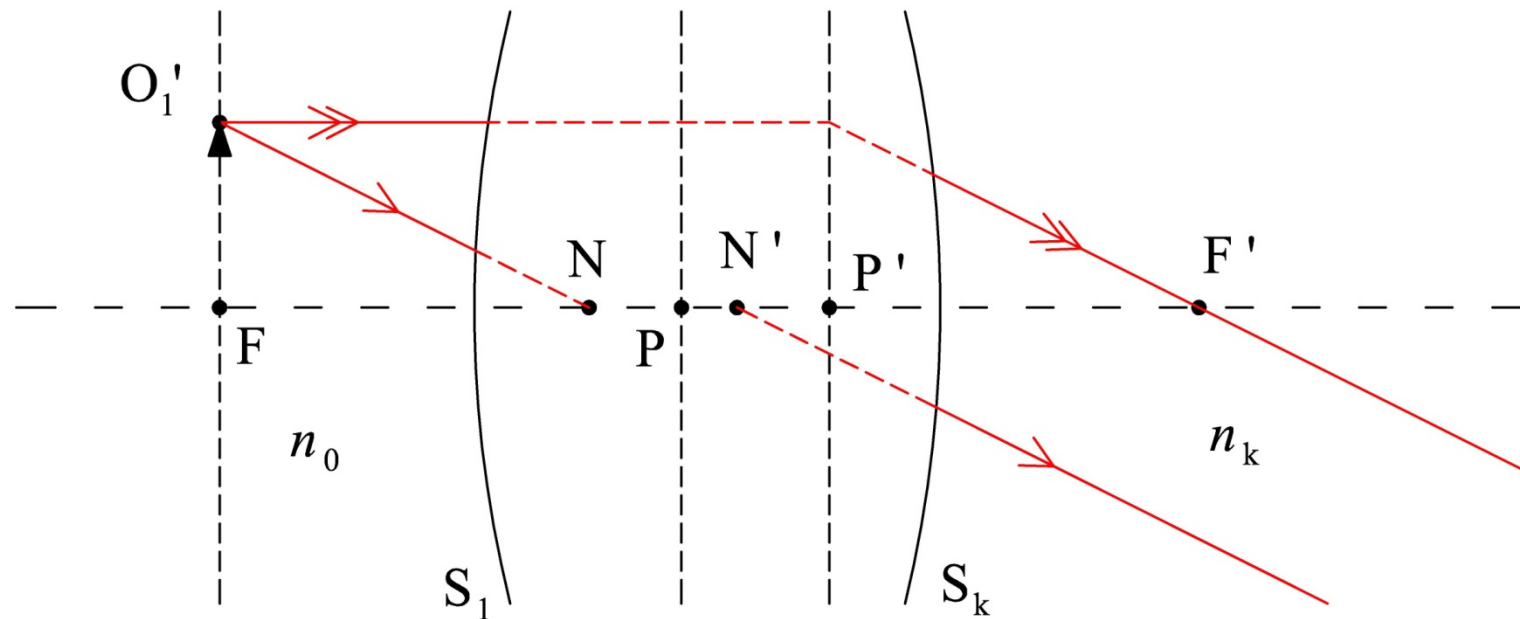
In quest'ultimo caso dobbiamo, allora, trovare un'altra formula per calcolare  $\eta'$ .

Se l'oggetto  $OO_1$  sottende angolo  $u_0$  (espresso in radianti), dalla figura è facile vedere che la dimensione dell'immagine  $F'O_1'$  è data da:

$$\eta' = \frac{n_0}{n_k} f' u_0$$

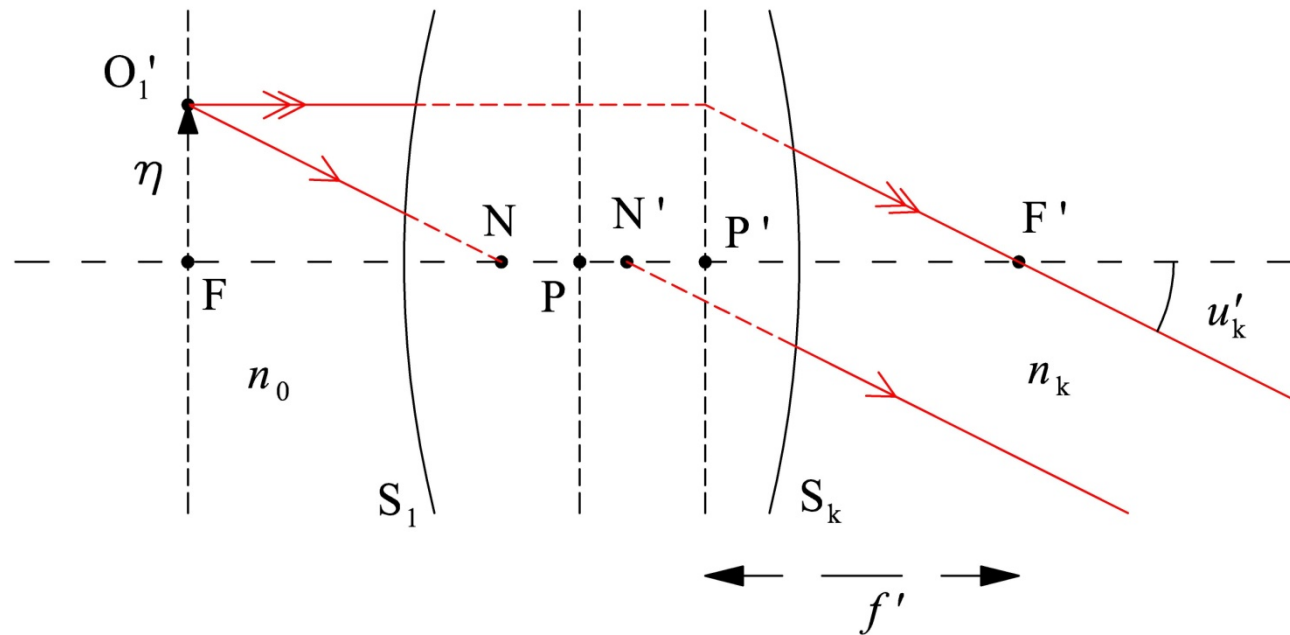


Quando il piano oggetto coincide con il primo piano focale, la legge di coniugazione ci conferma che il piano immagine è situato all'infinito e l'equazione dell'ingrandimento ci mostra che  $m = \infty$  ovvero che l'immagine di un generico oggetto ha dimensioni infinite.



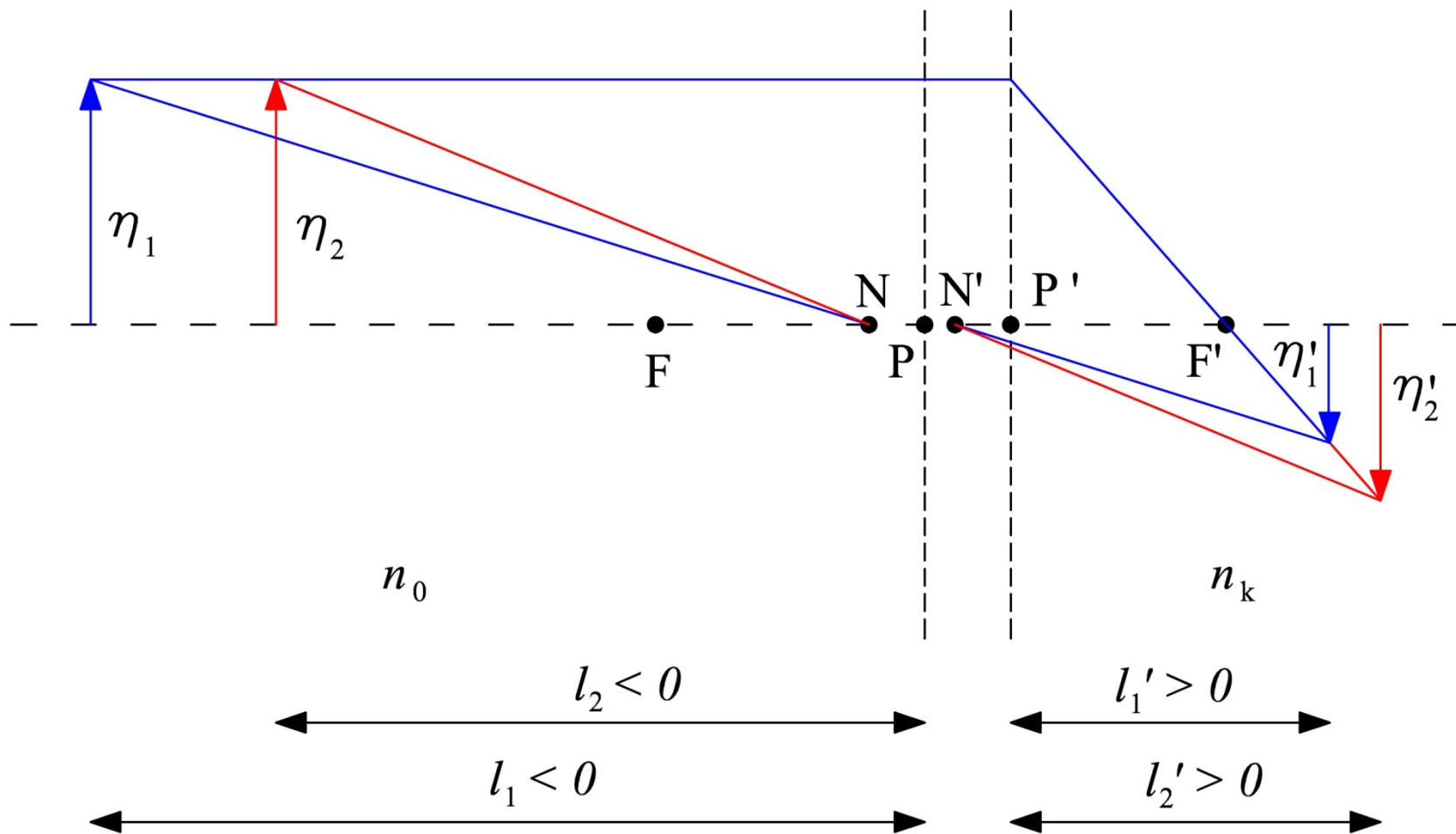


Dalla figura è facile vedere che, indicando con  $\eta$  la dimensione dell'oggetto, l'estensione angolare dell'immagine  $u'_k$  è fornita dalla seguente relazione:



$$u'_k = -\frac{\eta}{f'}$$

Per la legge di coniugazione una **traslazione assiale** dell'oggetto implica un analogo spostamento dell'immagine.



È facile dimostrare che la traslazione dell'immagine  $(l'_2 - l'_1)$  è direttamente proporzionale alla traslazione dell'oggetto  $(l_2 - l_1)$ :

$$(l'_2 - l'_1) = M (l_2 - l_1)$$

dove la costante di proporzionalità  $M$ , detta **ingrandimento longitudinale**, è data da:

$$M = \frac{n_k}{n_0} m_1 \cdot m_2$$

dove  $m_1$  ed  $m_2$  sono i due valori dell'ingrandimento trasversale corrispondenti alle due posizioni dell'oggetto considerate.

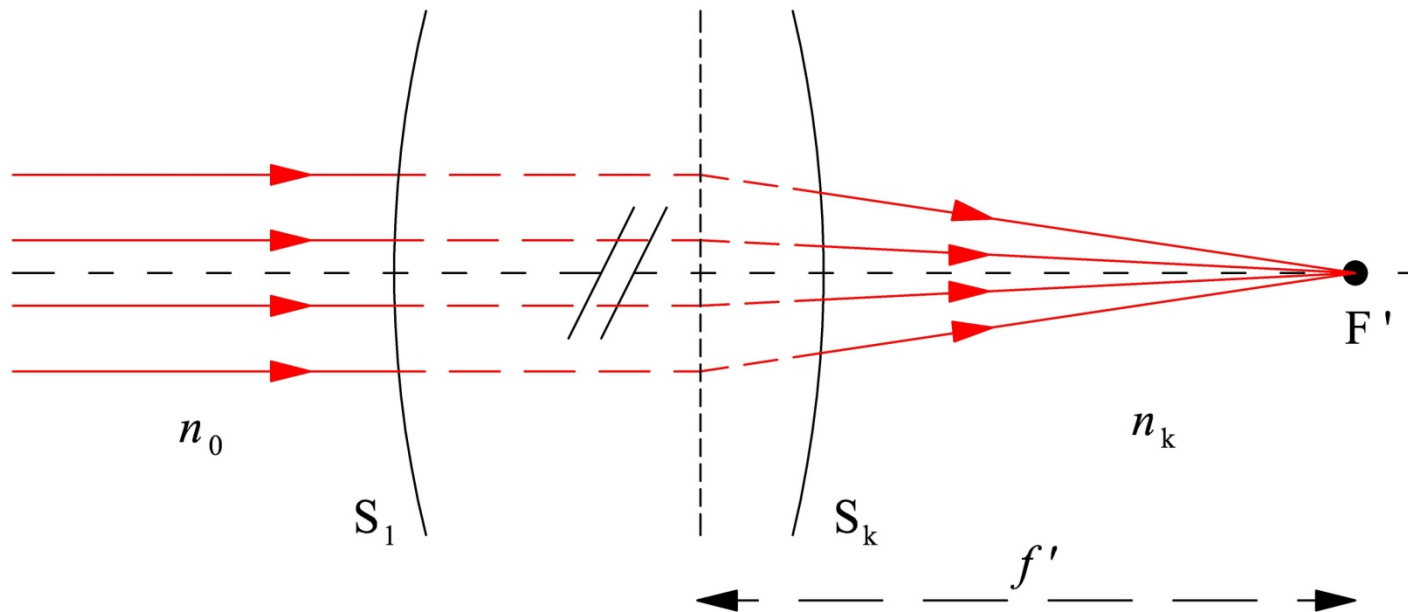
Si definisce **potere**, e si indica con il simbolo  $\Phi$ , di un sistema ottico centrato in condizioni parassiali e per una data lunghezza d'onda il rapporto:

$$\Phi = \frac{n_k}{f'}$$

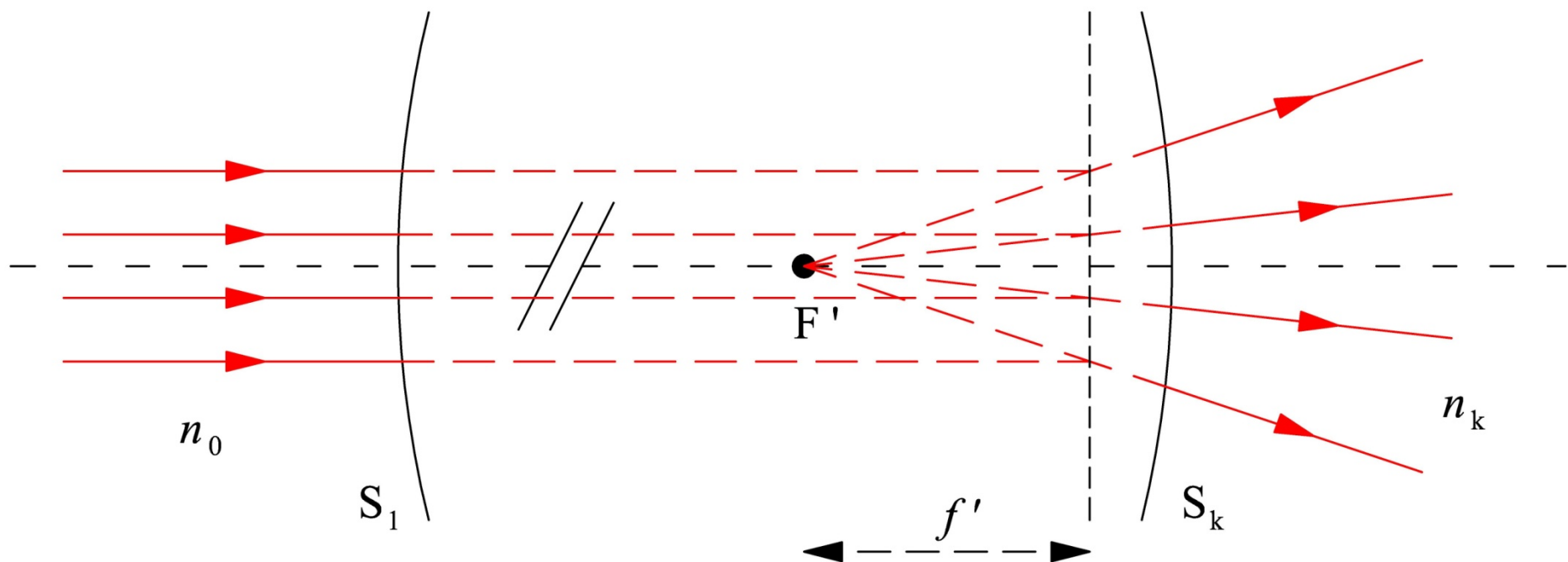
dove,  $n_k$  è l'indice di rifrazione del mezzo in cui è immerso il piano immagine e dove  $f'$  è la focale del sistema ottico per la lunghezza d'onda considerata. Il potere  $\Phi$  ha le dimensioni di un inverso di una lunghezza ed è consuetudine, esprimendo la focale in metri, misurarlo in **diottrie** ( $\mathcal{D}$ ):

$$1 \mathcal{D} = 1 \text{ m}^{-1}$$

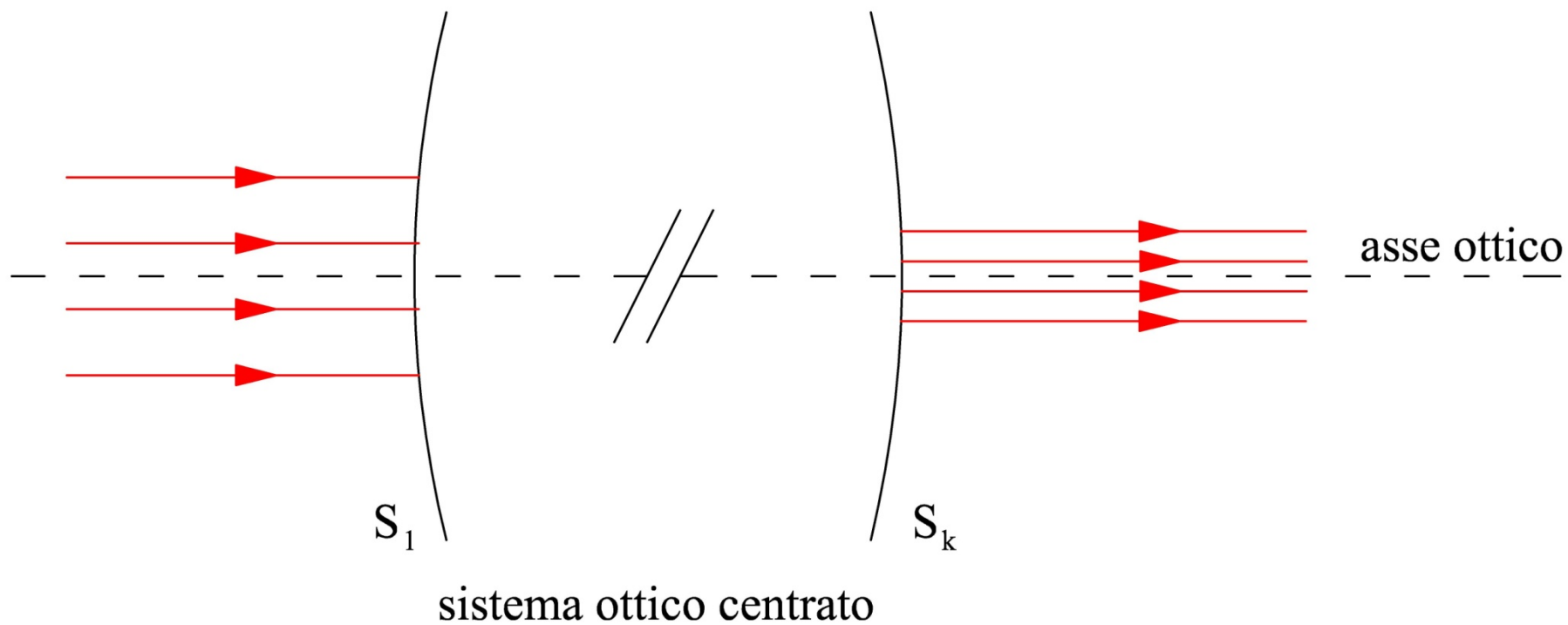
Il **potere  $\Phi$**  di un sistema ottico centrato **misura la capacità che ha il sistema ottico di alterare il parallelismo del fascio di raggi proveniente da un punto oggetto all'infinito, facendoli convergere (divergere) in (da) un punto**. In figura è mostrato un sistema ottico convergente ( $F'$  reale) con focale  $f'$  positiva. Da essa risulta evidente che, a parità di  $n_k$ , quanto è più piccola la focale, ovvero quanto è maggiore il potere, tanto prima i raggi emergenti da  $S_k$  convergono nel fuoco.



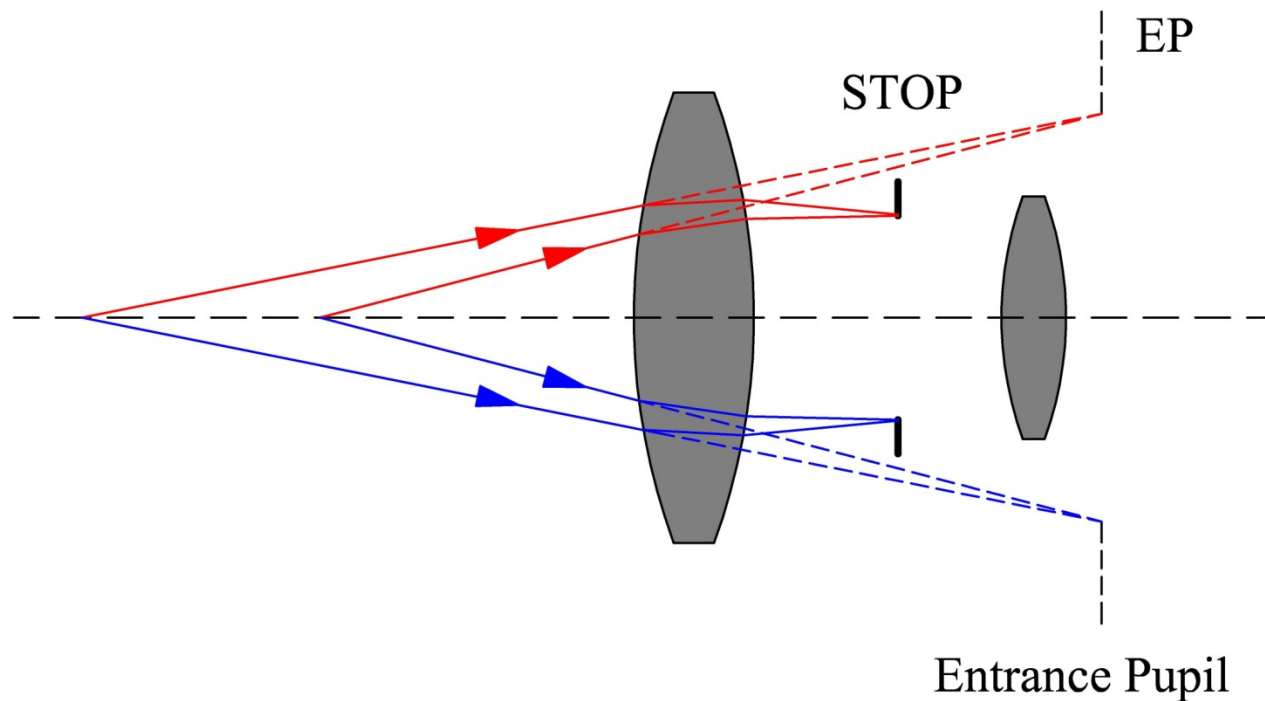
Un analoga considerazione può essere fatta in riferimento alla seguente figura dove è rappresentato un sistema ottico divergente ( $F'$  virtuale) con focale  $f'$  negativa. Quanto maggiore è il potere in valore assoluto, tanto maggiore è la divergenza del fascio in uscita da  $S_k$ .



Infine osserviamo che per un sistema **afocale** il potere è **nullo**.



Consideriamo un generico sistema ottico centrato. In condizioni parassiali e per una data lunghezza d'onda di interesse, l'apertura circolare, la cui immagine fatta da tutte le superfici ottiche che **precedono** lo stop coincide con lo stop stesso, è detta **pupilla di ingresso** del sistema ottico considerato ed è indicata con il termine **EP (Entrance Pupil)**.



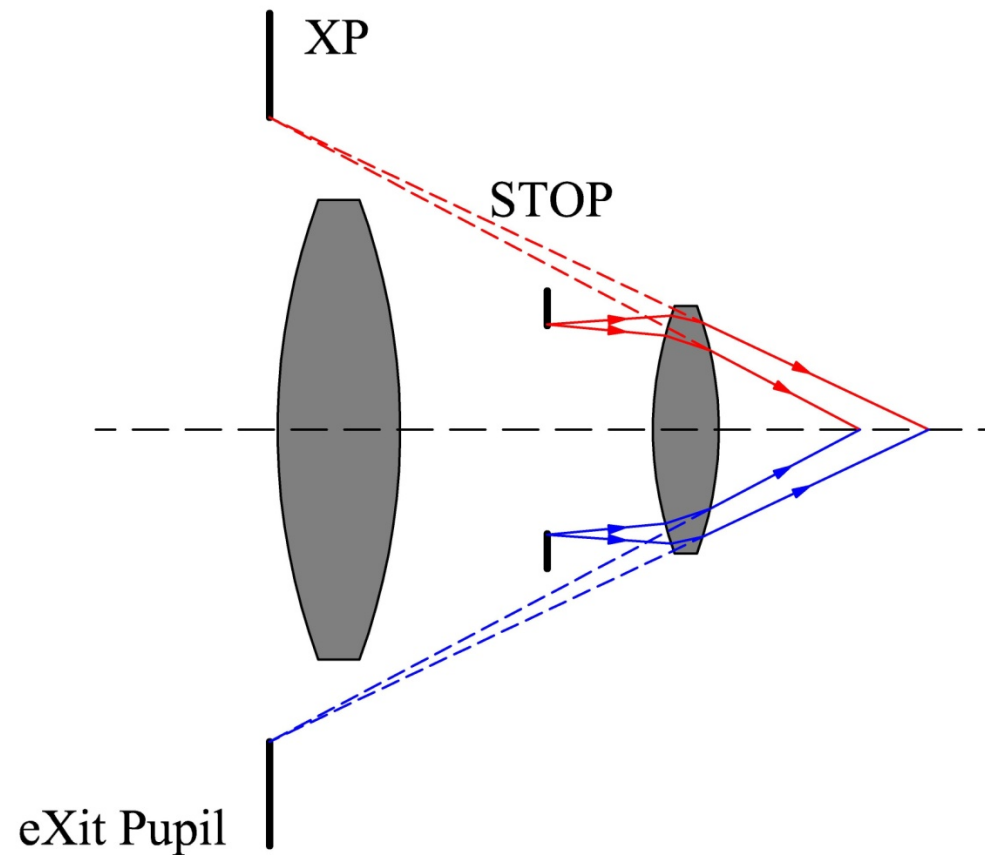


Mentre lo stop è sempre un diaframma fisico reale, la pupilla di ingresso può essere anche virtuale come mostrato nella precedente figura.

Quando lo stop coincide con la prima superficie di un sistema ottico centrato, la pupilla di ingresso di quest'ultimo è reale e coincide con lo stop stesso.

Dalla stessa definizione di pupilla d'ingresso si deduce che **tra i raggi raccolti da un sistema ottico centrato quelli che non vengono bloccati dallo stop sono quelli e solo quelli che entrano nel sistema ottico attraversando, loro o i loro prolungamenti, la pupilla d'ingresso.** Nel tracciamento dei raggi attraverso un sistema ottico centrato la conoscenza della dimensione e della posizione della sua pupilla di ingresso è, quindi, molto importante in quanto permette di evitare il tracciamento di raggi che verrebbero bloccati dallo stop con una netta riduzione del tempo di calcolo.

L'immagine dello stop fatta da tutte le superfici ottiche che **seguono** lo stop, è detta **pupilla di uscita** del sistema ottico considerato ed è indicata con il termine **XP (eXit Pupil)**.

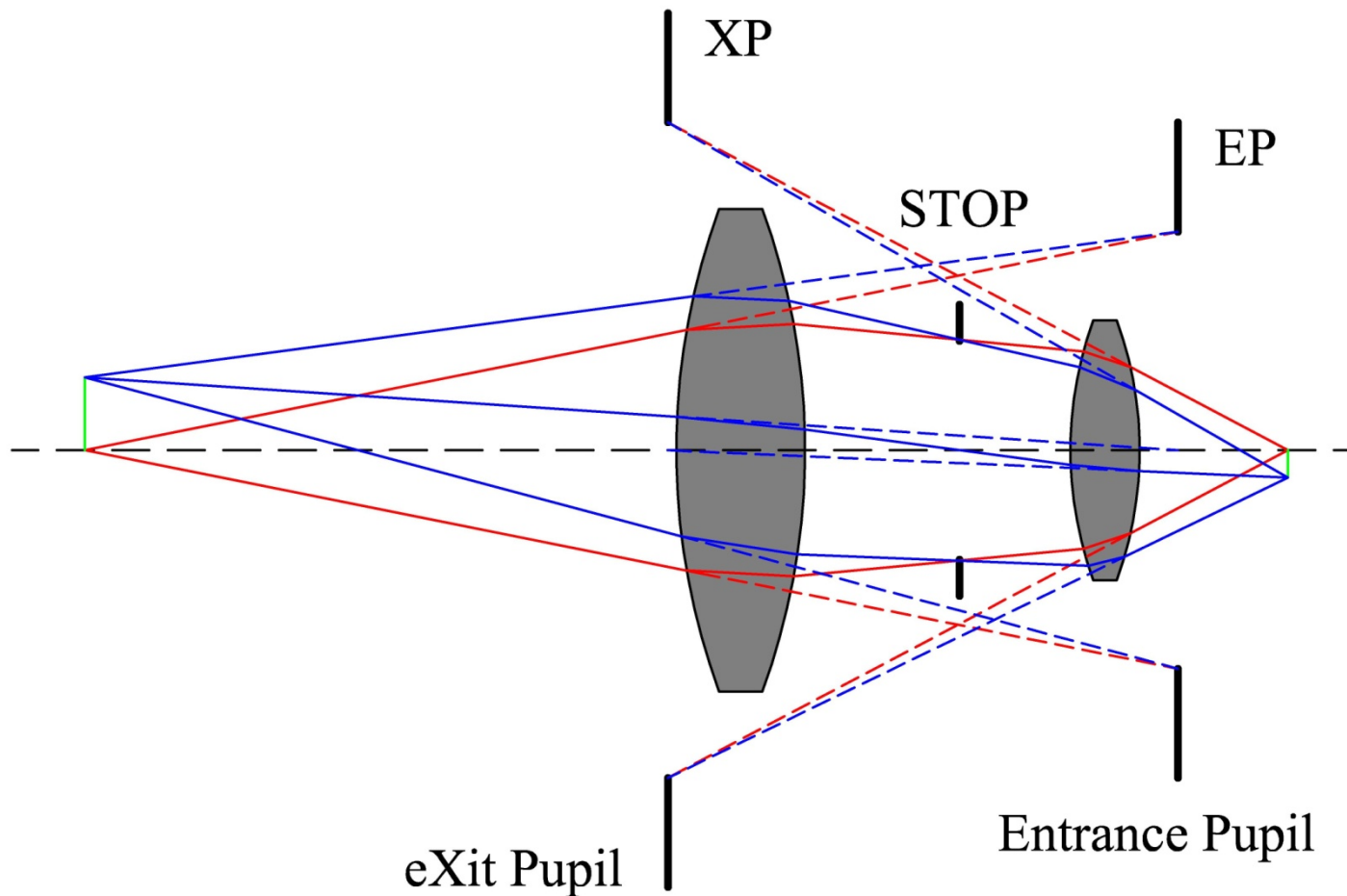


Anche la pupilla di uscita può risultare virtuale come è mostrato nella precedente figura. Quando lo stop coincide con l'ultima superficie di un sistema ottico centrato, la pupilla di uscita di quest'ultimo è reale e coincide con lo stop stesso.

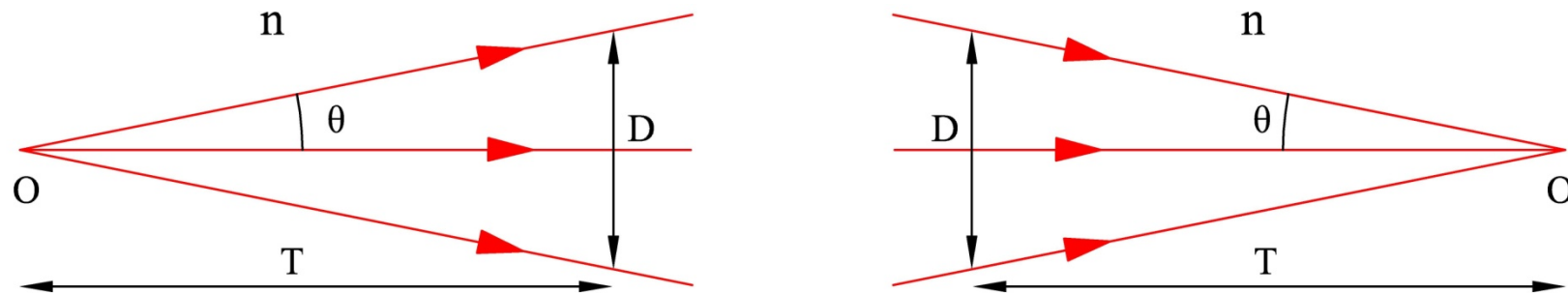
Dalle definizioni di EP e di XP discende che:

- la pupilla di uscita coincide con l'immagine della pupilla di ingresso fatta dall'intero sistema ottico;
- la pupilla di ingresso, lo stop e la pupilla di uscita sono tra di loro coniugate;
- tutti i raggi marginali entrano (escono) dal sistema ottico lambendo, loro o i loro prolungamenti, il bordo esterno della pupilla di ingresso (uscita).

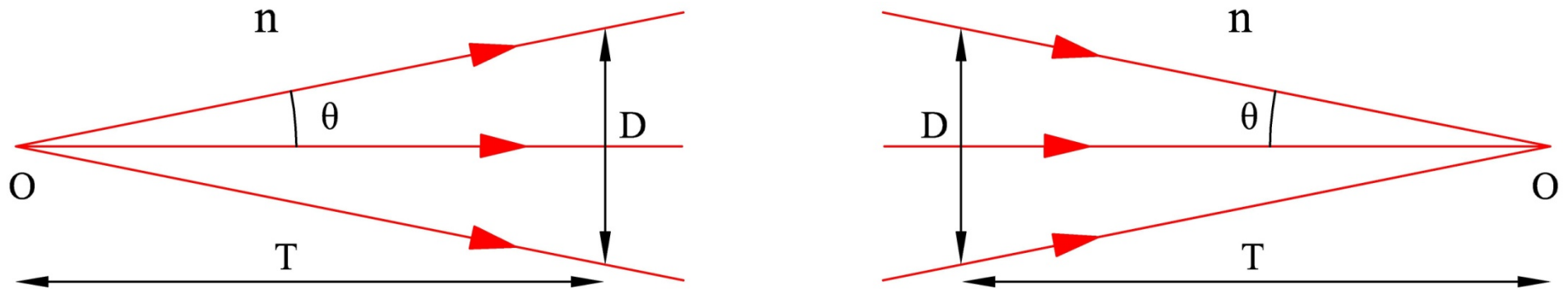
- tutti i raggi principali entrano (escano) dal sistema ottico passando, loro o i loro prolungamenti, attraverso il centro della pupilla di ingresso (uscita).



In un mezzo trasparente omogeneo ed isotropo consideriamo un cono di raggi, a cui è associata una data lunghezza d'onda, emessi da una sorgente puntiforme  $O$ , oppure che si focalizzano in un punto immagine  $O$ .

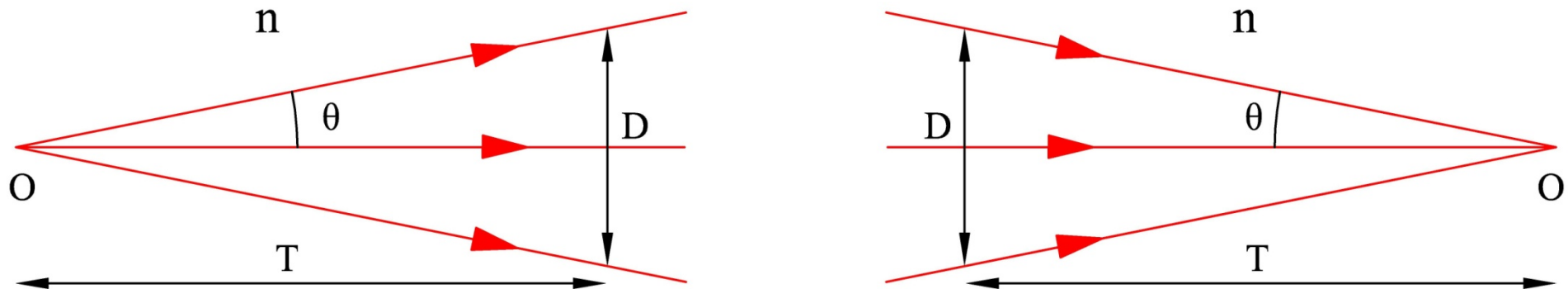


È consuetudine in Ottica Geometrica assegnare l'apertura di un cono di raggi assegnando o il suo **f/numero** (**f/#**) o la sua **apertura numerica** (**NA**). Se indichiamo con  $n$  l'indice di rifrazione del mezzo considerato alla lunghezza d'onda di interesse, l'**f/numero** è definito dalla seguente relazione:



$$f/\# = \frac{1}{n} \frac{|T|}{|D|} = \frac{1}{n} \frac{1}{2 \tan|\theta|}$$

A parità di indice di rifrazione  $n$ , più è **grande** l' $f$ /numero più il cono di raggi è **chiuso**, e viceversa più è **piccolo** l' $f$ /numero più il cono di raggi è **aperto**.



L'apertura numerica è invece definita dalla seguente relazione:

$$NA = n \sin|\theta|$$

A parità di indice di rifrazione  $n$ , più l'apertura numerica è **piccola** più il cono di raggi è **chiuso**, e viceversa più l'apertura numerica **si avvicina al valore di  $n$**  più il cono di raggi è **aperto**.

Nell'ambito dell'approssimazione parassiale essendo  $|\theta| \ll 1$  rad le formule sopra riportate si semplificano nelle seguenti relazioni:

$$f/\# = \frac{1}{n} \frac{1}{2 |\theta|}$$

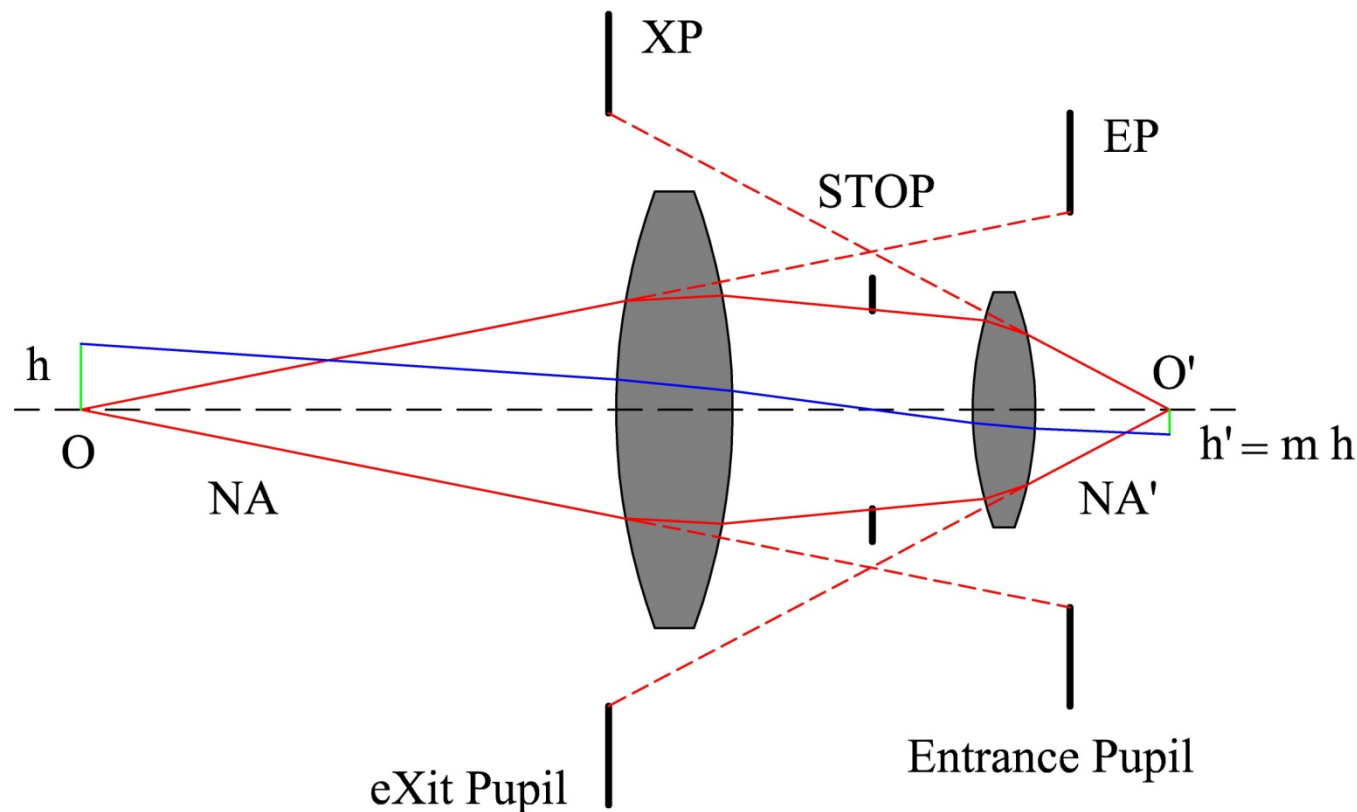
$$NA = n |\theta|$$

permettendo di evidenziare il seguente legame tra f/numero e apertura numerica:

$$NA = \frac{1}{2 f/\#}$$



Consideriamo un generico sistema ottico centrato in condizioni parassiali. Indichiamo con  $O$  una generica sorgente puntiforme, a cui è associata una data lunghezza d'onda, posta al finito sull'asse ottico e con  $O'$  la corrispondente immagine formata dal sistema ottico.

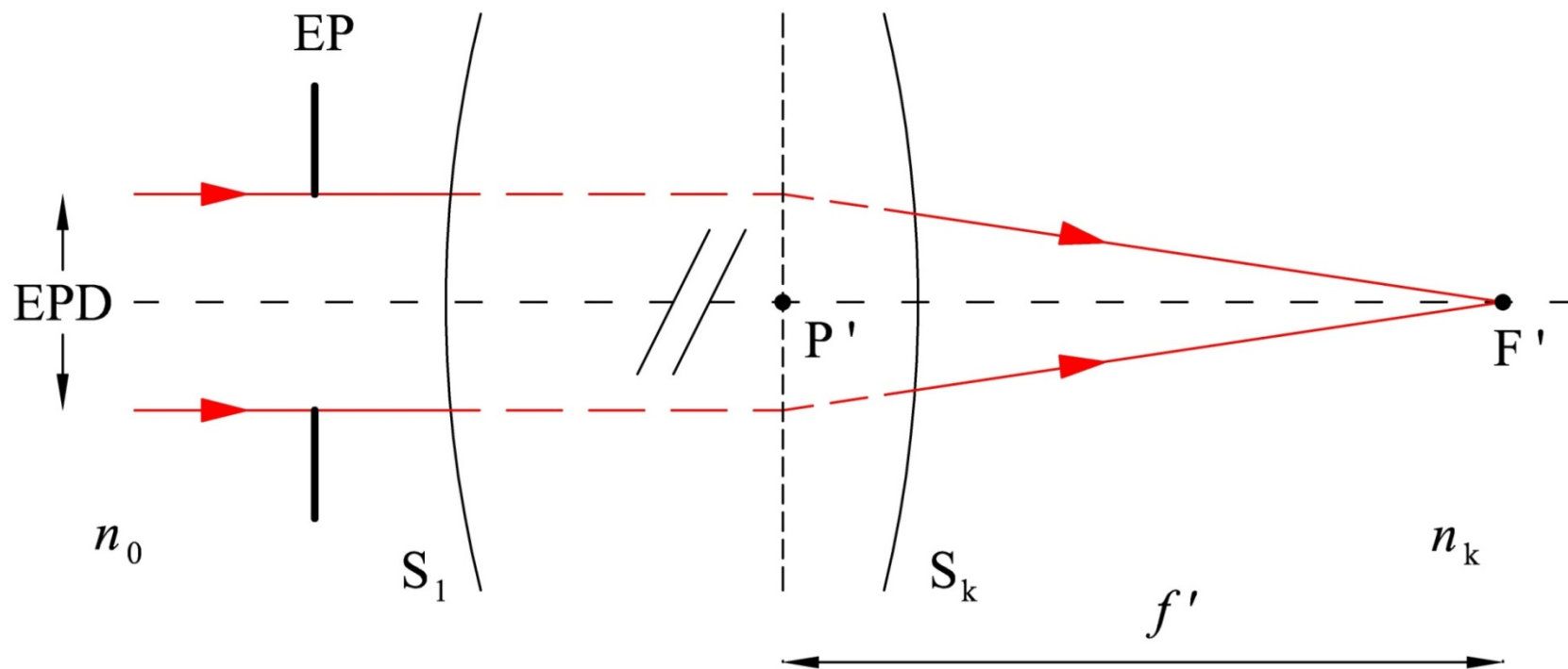


Indicando con NA (f/#) l'apertura numerica (f/numero) del cono di raggi entrante nel sistema ottico e con NA' (f/#') l'apertura numerica (f/numero) del corrispondente cono di raggi emergente si può dimostrare che nell'ambito dell'approssimazione parassiale valgono le seguenti relazioni:

$$NA' = \frac{1}{|m|} NA \qquad f/\#' = |m| f/\#$$

dove  $m$  è l'ingrandimento trasversale che compete alla coppia di piani coniugati perpendicolari all'asse ottico e passanti per O e O'. Da questa formula appare evidente che quanto più l'oggetto viene **ridotto** (**ingrandito**) sul piano immagine quanto più il cono emergente di raggi si **apre** (**chiude**).

Quando la sorgente puntiforme è all'infinito sull'asse ottico, la precedente formula non è applicabile in quanto si riduce a una forma indeterminata essendo  $m = 0$  e  $NA = 0$ . Tuttavia dalla seguente figura si deduce facilmente che l' $f$ /numero del cono di raggi emergente dal sistema ottico è in questo caso dato da:



$$f/\#' = \frac{1}{n_k} \frac{|f'|}{\text{EPD}}$$

dove con **EPD** abbiamo indicato il **diametro della pupilla d'ingresso** del sistema ottico. Confrontando queste ultime due formule si vede che in quest'ultimo caso è la EPD che caratterizza la dimensione del fascio di raggi che entrano nel sistema ottico, mentre la focale regola la dimensione dell'immagine sul secondo piano focale. Come per la formula precedente si osserva che al **diminuire (aumentare)** del valore assoluto della focale, cioè ad una **diminuzione (aumento)** delle dimensioni della immagine sul secondo piano focale, l'**f/numero diminuisce (aumenta)** ovvero il cono emergente dal sistema ottico si **apre (chiude)** maggiormente.